12. вје

Tuesday, 21 December 2021 16:17

ФУРИЈЕОВИ РЕДОВИ

X - векторски простор над $\mathbb{R}$

деф. $\langle \cdot,\cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ је скаларни производ ако је

(1) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$ симетричност

(2) $\langle \lambda u_1 + \mu u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \mu \langle u_2, v \rangle$ билинеарност

(3) $\langle u,u \rangle \geq 0$ позитивност

(4) $\langle u,u \rangle = 0 \iff u = \vec{0}$ недегенерисаност

T (Коши-Шварцова неједнакост)

$$|\langle u,v \rangle| \leq \sqrt{\langle u,u \rangle \langle v,v \rangle}$$

Доказ. $\forall t \in \mathbb{R}$ из аксиоме (3) $\Rightarrow$ $\langle u+tv, u+tv \rangle \geq 0$

$f(t) := \langle u+tv, u+tv \rangle = \langle v,v \rangle t^2 + 2\langle u,v \rangle t + \langle u,u \rangle \geq 0$

$\iff \Delta \leq 0$, $\Delta = B^2 - 4AC = 4\langle u,v \rangle^2 - 4\langle v,v \rangle \langle u,u \rangle \leq 0$

$\Rightarrow \langle u,v \rangle^2 \leq \langle v,v \rangle \langle u,u \rangle \ / \sqrt{\ }$ $\square$

деф. X је В.П. Норма $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ тдј.

(i) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ $\lambda \in \mathbb{R}, u \in X$ хомогеност

(ii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ неједнакост троугла

(iii) $\|u\| = 0 \iff u = \vec{0}$ недегенерисаност.

Терминологија: в. пр. са $\langle \cdot,\cdot \rangle$ зове се пред-Хилбертов простор
в. пр. са $\|\cdot\|$ зове се нормирани в. простор (НВП)

T Сваки $\langle \cdot,\cdot \rangle$ индукује норму са $\|u\| := \sqrt{\langle u,u \rangle}$.

Доказ. из акс (4) $\Rightarrow$ добро деф; из деф $\Rightarrow$ $\|u\| \geq 0$

(i) $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} \overset{(2)}{=} \sqrt{\lambda \langle u, \lambda u\rangle} \overset{(1)}{=} \sqrt{\lambda \langle \lambda u, u\rangle} \overset{(2)}{=} \sqrt{\lambda^2 \langle u, u\rangle} = |\lambda| \, \|u\|$

(ii) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \overset{К.-Ш.}{\leq}$

$$\leq \langle u,u\rangle + 2\sqrt{\langle u,u\rangle}\cdot\sqrt{\langle v,v\rangle} + \langle v,v\rangle = \left(\sqrt{\langle u,u\rangle} + \sqrt{\langle v,v\rangle}\right)^2$$

неједнакост Минковског

$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \; / \sqrt{\ }$

(iii) следи директно из (4) $\square$

Пример. $\mathbb{R}^n$, $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$ $\quad \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

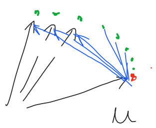
$\rightsquigarrow \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\square$

деф. X је НВП. Кажемо да низ вектора $u_n \in X$ конвергира ка вектору $u \in X$ ако

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \|u - u_n\| < \varepsilon$$

$\Big(\Leftrightarrow \; \underset{\mathbb{R}^+}{\underset{\Uparrow}{a_n}} := \|u - u_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Big)$

Пишемо $u_n \to u$ или $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ $\square$



T1 Норма је непрекидно пресликавање, тј. $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \Rightarrow \|u_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|u\|$.

Доказ. Важи $\boxed{\big|\,\|u\|-\|v\|\,\big| \le \|u-v\|}$ јер

$$\|u\| = \|u-v+v\| \underset{\text{Нej. }\Delta}{\le} \|u-v\| + \|v\|$$

$$\|u\| - \|v\| \overset{(1)}{\le} \|u-v\|$$

На исти начин добијамо $\quad \|v\| - \|u\| \overset{(2)}{\le} \|v-u\| = \|u-v\|$

$$-\|u-v\| \overset{(2)}{\le} \|u\| - \|v\| \overset{(1)}{\le} \|u-v\| \qquad \left(-A \le B \le A \iff |B| \le A, \quad A \ge 0 \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \le \|u-v\|$$

Ако $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u \iff \|u_n - u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \big|\,\|u_n\| - \|u\|\,\big| \le \|u_n - u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow \|u_n\| \to \|u\|$ □

T2 Скаларни производ је непрекидан, тј. $u_n \to u$ (у $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$) и $v_n \to v \Rightarrow \langle u_n, v_n \rangle \to \langle u, v \rangle$ (у $\mathbb{R}$).

Доказ. $\big|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle\big| = \big|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u_n, v\rangle + \langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle\big|$

$$= \big|\langle u_n, v_n - v\rangle + \langle u_n - u, v\rangle\big| \le \big|\langle u_n, v_n - v\rangle\big| + \big|\langle u_n - u, v\rangle\big| \overset{\text{К.-Ш.}}{\le}$$

$$\le \underbrace{\|u_n\|}_{} \cdot \|v_n - v\| + \|u_n - u\| \cdot \|v\| \le M \cdot \underbrace{\|v_n - v\|}_{\to 0} + \|v\| \cdot \underbrace{\|u_n - u\|}_{\to 0}$$

$u_n \to u$
$\Rightarrow \|u_n\| \to \|u\|$
$\|u_n\|$ је конв. низ у $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \|u_n\|$ је огр.

$\to 0$ јер $v_n \to v$ (T1)

$\to 0$, $u_n \to u$ (T1)

$$\Rightarrow \big|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle\big| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \langle u_n, v_n\rangle \to \langle u, v\rangle$$ □

Најважнији пример(и).

① $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\quad C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ непрекидне} \}$

$C([a,b])$ је в. простор: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

ово је ∞ дименз. в. простор

деф. скаларни пр. $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x)\, dx$

ово јесте скаларни производ

(1) $\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \int_a^b g(x) f(x)\, dx \quad \to \quad \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

(2) $\int_a^b (\lambda f_1 + \mu f_2) g\, dx = \lambda \int_a^b f_1(x) g(x) dx + \mu \int_a^b f_2(x) g(x)\, dx$

(3) $\int_a^b f(x) f(x)\, dx = \int_a^b f^2(x) dx \geq 0$

(4) $\int_a^b f^2(x)\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \equiv 0$.

<u>ЛЕМА.</u> Ако је $\varphi \geq 0$ непр. ф-ја и $\int_a^b \varphi(x)\, dx = 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv 0$

<u>Доказ.</u> Ако пп. $\exists x_0$ $\underbrace{\varphi(x_0)}_{=:\alpha} > 0$, φ непрекидна $\Rightarrow \exists \delta$ тдј. $\varphi(x) \geq \frac{\alpha}{2}$ на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

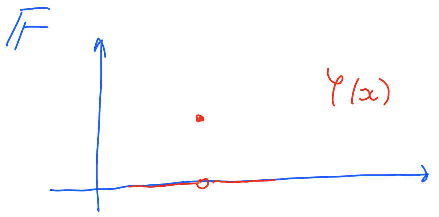
$$\int_a^b \varphi(x)dx = \underbrace{\int_a^{x_0-\delta} \varphi(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x) dx + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} \varphi(x)\, dx}_{\geq 0} \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x) dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \alpha/2\, dx$$

$$= \alpha \cdot \delta > 0$$

↯

(слично се доказује у случају $x_0 \in \{a, b\}$)

□



$\varphi(x)$ прекидна, $\int_a^b \varphi(x) = 0$, $\varphi \not\equiv 0$

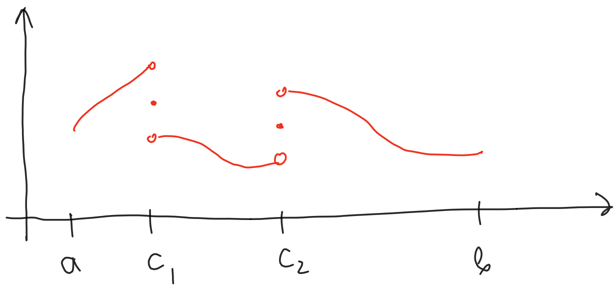
$\Downarrow$

$f^2 \geq 0$ и непр. ако је $\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \overset{\text{лема}}{\Rightarrow} f^2 \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ □

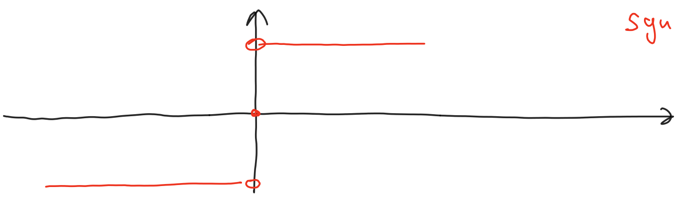
(2) $C_0[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f има само коначно много тачака прекида $c_1, \dots, c_n \in (a,b)$ што су прекиди I врсте и важи $f(c_i) = \frac{1}{2}\left(f(c_i^+) + f(c_i^-)\right) \}$

важи у свакој тачки у којој је f непрекидна

$$f(c^{\pm}) = \lim_{x \to c^{\pm}} f(x)$$



Пример. $f(x) = \operatorname{sgn} x \in C_0([a,b])$ $\forall a, b \neq 0$



$\operatorname{sgn} 0 = 0 = \frac{1}{2}(1 + (-1))$

$= \frac{1}{2}(\operatorname{sgn} 0^+ + \operatorname{sgn} 0^-)$

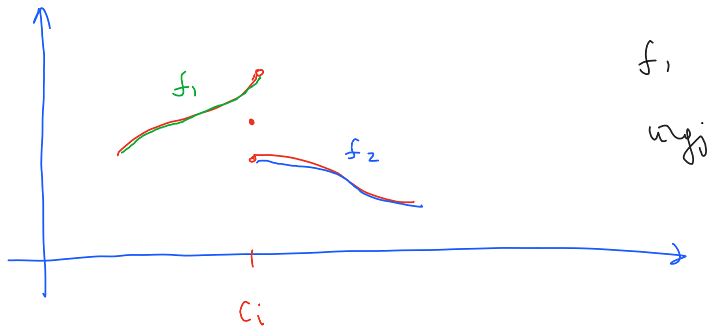
Домаћи: $f, g \in C_0([a,b]) \Rightarrow f + g \in C_0([a,b])$, $\lambda f \in C_0([a,b])$.

На $C_0([a,b])$ деф. $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x) g(x)\,dx$

Ово јесте скаларни производ. (1)–(3) се исто доказују као за $C([a,b])$

(4) $f \in C_0[a,b]$ $\quad \int_a^b f^2(x)\,dx = \langle f, f\rangle = 0 \overset{?}{\Rightarrow} f \equiv 0$

Нека су c_{i-1}, c_i, c_{i+1} три суседне тачке прекида



f_1 деф. на $[c_{i-1}, c_i]$

тд. $f_1\big|_{(c_{i-1}, c_i)} = f$

$f_1(c_{i-1}) := f(c_{i-1}^{+})$

$f_1(c_i) := f(c_i^{-})$

f_1 је непрекидна на $[c_{i-1}, c_i]$

f_2 на $[c_i, c_{i+1}]$, $f_2\big|_{(c_i, c_{i+1})} = f$

и продужимо непр.

f и f_1 су исте осим у две тачке $\Rightarrow \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_1^2\,dx = \int_{c_{i-1}}^{c_i} f^2\,dx = 0$

f_1 непр. $\overset{\text{лема}}{\Rightarrow} f_1 \equiv 0$ на $[c_{i-1}, c_i]$

исто $f_2 \equiv 0$ на $[c_i, c_{i+1}]$

$$f\big|_{(c_{i-1}, c_i)} \equiv 0, \quad f\big|_{(c_i, c_{i+1})} \equiv 0$$

$$f(c_i) = \frac{1}{2}\left(f(c_i^{-}) + f(c_i^{+})\right)$$

$$= \frac{1}{2}\big(\underset{0}{\underset{\parallel}{f_1(c_i)}} + \underset{0}{\underset{\parallel}{f_2(c_i)}}\big) = 0$$

$\Rightarrow f\big|_{(c_{i-1}, c_{i+1})} = 0$ и овако докажемо за $\forall$ интервал овог облика (који у себи садржи један прекид) $\square$

деф. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle) \ni u, v$, кажемо да су u и v ортогонални ако је $\langle u, v\rangle = 0$, пишемо $u \perp v$.

T (Питагорина теорема) $u \perp v \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Доказ. $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{2\langle u,v\rangle}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$ $\square$

деф. X пред-Хилбертов. Скуп $\{e_1, e_2, \dots\}$ (може бити бесконачан) се зове ортонормирани систем вектора (ОНС) ако је

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$\square$

Пример. $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin(nx), \cos(nx), \dots$ је ортогоналан у $C([-\pi,\pi])$ (или у $C_2([-\pi,\pi])$)

јер, означимо се

$$\tilde{e}_n := \cos(nx) \quad n \in \mathbb{N}_0$$
$$\tilde{f}_n := \sin(nx) \quad n \in \mathbb{N}$$

Важи

$$\langle \tilde{e}_n, \tilde{e}_m \rangle = 0 \quad n \neq m \qquad (1)$$
$$\langle \tilde{f}_n, \tilde{f}_m \rangle = 0 \quad n \neq m \qquad (2)$$
$$\langle \tilde{e}_n, \tilde{f}_m \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N} \qquad (3)$$

(2): $$\langle \tilde{f}_n, \tilde{f}_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} \right\} = 0$$

(1), (3): Домаћи.

Хоћемо ортонормиран

$$\|\tilde{f}_0\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = 2\pi \Rightarrow \|\tilde{f}_0\| = \sqrt{2\pi}, \qquad f_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}_0$$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$n \geq 1$

$$\|\tilde{f}_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx = \pi + \frac{1}{2}\,\frac{\sin(2nx)}{2n}\Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \pi$$

$\Rightarrow \ \|\tilde{f}_n\| = \sqrt{\pi}$ $\qquad f_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{f}_n, \qquad f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$

$\|\tilde{e}_n\|^2 = \sqrt{\pi} \quad \Rightarrow \quad e_n := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{e}_n \qquad e_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$

$$\boxed{\left\{1/\sqrt{2\pi}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}}$$

је ОНС у $C([-\pi,\pi])$ $(\subseteq C_0([-\pi,\pi]))$ $(*)$

деф. X пред-Хилбертов в. простор са скаларним пр. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (бесконачно дим.) и $\{e_1, e_2, \dots\}$ ОНС, $u \in X$

$\alpha_n := \langle u, e_n\rangle$ Фуријеови коефицијенти вектора u у односу на ОНС $\{e_1, e_2, \dots\}$

деф. (ознака) $\{e_1, e_2, \dots\}$ је ОНС у X, $u \in X$

$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i\rangle e_i$ се зове Фуријеов ред вектора u у односу на дати ОНС.

у коначно дим. случају, ако је $\{e_1, \dots, e_k\}$ ОНС и база

$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{k} \langle u, e_i\rangle e_i$

Шта је Ф. ред ф-је f у односу на ОНС $(*)$?

$\alpha_0 = \frac{\langle f, 1\rangle}{\sqrt{2\pi}}, \quad \alpha_n = \frac{\langle f, \cos(nx)\rangle}{\sqrt{\pi}}, \quad \beta_n = \frac{\langle f, \sin(nx)\rangle}{\sqrt{\pi}}$

уводимо ове ознаке: $a_0 := \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_0, \quad a_n := \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}}, \quad b_n := \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}}$

Ф. ред ф-је f је $\frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \beta_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right)$

тј. $\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\}}$ Тригонометријски Фуријеов ред

Гдје је $a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot 1\,dx = \boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0}$

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\langle f, \cos nx\rangle \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_n = \frac{\beta_n}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\langle f, \sin nx\rangle \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx} \quad n \in \mathbb{N}$$

Надаље $\{e_1, e_2, \dots\}$ је ОНС у $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $u \in X$.

Тврђење 1. $\|u - \sum_{i=1}^{n}\langle u, e_i\rangle e_i\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle u, e_i\rangle^2$

Доказ. $\alpha_i := \langle u, e_i\rangle$

$$\|u - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2 = \langle u - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, u - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\rangle =$$

$$= \langle u, u\rangle - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle u, e_i\rangle + \overbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\langle e_i, e_j\rangle}^{=\alpha_i^2}$$

$$= \|u\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

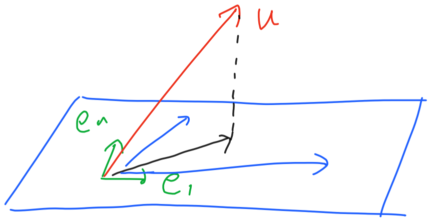
$$= \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \qquad \square$$

Т (Беселова неједнакост) $\alpha_i = \langle u, e_i\rangle$, $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2 \leq \|u\|^2$.
Специјално, $\sum\alpha_i^2$ конвергира и $\alpha_i \to 0$, $i \to \infty$.

Доказ. $\|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \|u - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|^2 \geq 0 \quad \forall n$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \leq \|u\|^2 \quad / \lim_{n\to\infty} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2 \leq \|u\|^2 \qquad \square$$

Тврђење 2. Нека су $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n$ (било који), $\alpha_i = \langle u, e_i\rangle$
Тада је $\|u - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\| \geq \|u - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\|$.



$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ – све вектори у $\mathcal{L}(e_1, \dots, e_n)$

Приметимо да је $\quad u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \perp e_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

(јер $\langle u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \rangle = \langle u, e_j \rangle - \alpha_j = \alpha_j - \alpha_j = 0$).

Доказ. $\quad A = \|u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| \qquad B = \|u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|$

$$A^2 = \langle u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \rangle = \|u\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$
$$= \|u\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

$$B^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

$$A^2 - B^2 = -2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \alpha_i)^2 \geq 0 \qquad \square$$

Тврђење 3. $\quad \alpha_i = \langle u, e_i \rangle, \quad \|u - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i\| \leq \|u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|$.

Доказ.
$$\|u - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i\|^2 \overset{\text{Тврђ. 1}}{=} \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^2$$
$$\|u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\|^2 \overset{\text{Тврђ. 1}}{=} \|u\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \|u - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i\| + \alpha_{n+1}^2 \qquad \square$$

Хоћемо да деф. базу у ∞ дим. случају.

деф. ОНС $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ у пред-Хилбертовом в. простору X

је потпун ако $\forall u \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ тдј. $\|u - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| < \varepsilon$

је база ако је $\sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle e_i = u, \quad \forall u \in X$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \xrightarrow{n \to \infty} u$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i - u \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

T X пред-Хилбертов в. пр., $\{e_1, e_2, ..\}$ ОНС. Тада су следећи услови еквивалентни

(1) $\{e_1, e_2, \dots\}$ је потпун

(2) $\{e_1, e_2, \dots\}$ је база

(3) $\forall u \in X \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle^2$ Парсевалова једнакост

$\geq$ увек

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2) Хоћемо $u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle e_i$ $\left(\Leftrightarrow \left\| u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \right)$

$\varepsilon > 0$ дато

$\exists\, n_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \qquad \left\| u - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon$

Тврђење 2 $\Rightarrow \quad \left\| u - \sum_{i=1}^{n_0} \langle u, e_i \rangle e_i \right\| \leq \left\| u - \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i e_i \right\| < \varepsilon$

Тврђење 3 $\Rightarrow \quad \forall n \geq n_0 \quad \left\| u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \right\| \leq \left\| u - \sum_{i=1}^{n_0} \langle u, e_i \rangle e_i \right\| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad \left\| u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$