11. час

Tuesday, 14 December 2021 16:21

Видели смо: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (*)

D_f је скуп облика

$$\left.\begin{array}{l}[x_0-R,\ x_0+R] \\ (x_0-R,\ x_0+R) \\ [x_0-R,\ x_0+R) \\ (x_0-R,\ x_0+R]\end{array}\right\} \quad R=\frac{1}{2} \text{ дужине интервала}$$

$\{x_0\}$ $\qquad R=0$

$\mathbb{R}$ $\qquad R=\infty$

деф. R се зове полупречник конвергенције степеног реда (*)
(може бити и 0 и ∞, тј. $R\in[0,+\infty]$)

Т1 Нека је $\boxed{R := \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}}$, a_n низ у (*). Тада степ. ред (*) конвергира ако је $|x-x_0|<R$ а дивергира ако је $|x-x_0|>R$.
Тј. R је полупречник конв. ст. реда (*).

$\left(\frac{1}{0^+}=+\infty,\ \frac{1}{+\infty}=0\right)$

Напомена. $x=x_0+R$, $x=x_0-R$ посебно испитујемо конвергенцију.

Доказ Теореме. $\boxed{R\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

- $|x-x_0|<R$

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = |x-x_0|\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0|\cdot\frac{1}{R} < 1$$

$\Rightarrow$ апс. конв. по Кошијевом тесту

- $|x-x_0|>R$ $\qquad R=\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ $\qquad \exists\, n_k$ $\quad \lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}=\dfrac{1}{R}>\dfrac{1}{R_1}$

$\Downarrow$
$\exists R_1$
$|x-x_0|>R_1>R$

$\Downarrow$
$\exists k_0,\ \forall k\geqslant k_0$

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{R_1}$$

$\sum b_n \qquad b_n = a_n (x-x_0)^n$

$k \geq k_0$:

$$|b_{n_k}| = |a_{n_k}|\,|x-x_0|^{n_k} \geq \frac{1}{R_1^{\,n_k}} R_1^{\,n_k} = 1 \Rightarrow b_n \text{ не тежи нули.}$$

$\boxed{R=0}$ хоћемо: $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty \quad (\Leftrightarrow R=0)$

$\Rightarrow \forall x \neq x_0$ ред (*) дивергира.

$x \neq x_0$ $\quad \exists$ подниз n_k $\quad \lim \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = +\infty$

$\exists k_0 \ \forall k \geq k_0 \quad \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \dfrac{1}{|x-x_0|}$

$|a_{n_k}| \geq \dfrac{1}{|x-x_0|^{n_k}} \Rightarrow |a_{n_k}(x-x_0)^{n_k}| \geq 1 \Rightarrow$ општи члан $\not\to 0$

$\boxed{R=\infty}$ хоћемо: $\forall x \quad \sum a_n (x-x_0)^n$ конв.

$\Updownarrow$

$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

$0 < q < 1$ фикс. $\quad \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{q}{|x-x_0|} \quad (x \neq x_0)$

$\Rightarrow |a_n|\,|x-x_0|^n < q^n \quad \forall n \geq n_0$

$\sum q^n$ конв. $\Rightarrow \sum |a_n(x-x_0)|^n$ конв. (и то апсолутно). □

T2 Нека је $a_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$.

Ако $\exists \boxed{L := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$ (може да буде и ∞) $L \in [0,+\infty]$

Тада је $L = R$.

<u>Доказ.</u> ко хоће, може да проба сам, из Даламберовог или имитирајући доказ Дал. теста.

Примери.

(1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\qquad a_n=\frac{1}{n!}$ $\qquad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = (n+1)\xrightarrow{n\to\infty}\infty$

$D_f=\mathbb{R}$

(2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\left(= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots\right)$

$x^{2n+1}=x\cdot x^{2n}=x\cdot(x^2)^n \qquad t=x^2$

$\sum\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(2n+1)!} \qquad a_n=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = 2n+3 \xrightarrow{n\to\infty}\infty \Rightarrow \mathbb{R}=D_f$

(3) домашно $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=f \qquad D_f=\mathbb{R}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ $\left(= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots = \ln(1+x)\right)$

$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\xrightarrow{n\to\infty}1 \Rightarrow R=1$

Знаме конв. на $(-1,1)$ и дивергира на $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$x=1$ $\qquad\qquad$ $x=-1$

$\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\qquad\qquad$ $\sum\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n}=-\sum\frac{1}{n}$

конв. по Лајбниц $\qquad\qquad$ дивергира

$D_f=[-1,1]$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1$$

Наћи R, без испитивања у крајевима

$a_n = \binom{\alpha}{n}$ $\qquad \alpha \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \forall n \geq \alpha+1 \quad a_n = 0 \quad \Rightarrow$ ред конв. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\alpha \notin \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|} = \frac{n+1}{|\alpha-n|} \underset{n \geq n_0 > \alpha}{=} \frac{n+1}{n-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Сл. ред $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ конв. на $(-1,1)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

конв. на $\mathbb{R}$ ако $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

дивергира на $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots = (1+x)^\alpha$$

Задаци: Наћи скуп конвергенције.

1. $\sum \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} 3 \frac{\sqrt[n]{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3 \cdot \frac{1}{1} = 3$$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

$$1 \leq 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n \leq 2 \quad / \sqrt[n]{}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\Rightarrow \quad R = 1$

$x = -1$ $\qquad\qquad$ $x = 1$

$$\sum \frac{(3^n + (-2)^n)\cdot(-1)^n}{n} \qquad\qquad \sum \frac{3^n + (-2)^n}{n}$$

у оба случаја општи члан не тежи

$$\left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} (-1)^n \right| = \left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \right| = \frac{3^n + (-2)^n}{n} = b_n$$

$$\overline{\lim}\, b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} = +\infty$$

2. $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \qquad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \qquad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{e}$$

$x = \frac{1}{e}$ и $x = -\frac{1}{e}$

$$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} \qquad\qquad \sum (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n} = e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot e^{-n} = e^{n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n}$$

$$= e^{n - \frac{1}{2} + o(1) - n} = e^{-\frac{1}{2} + o(1)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1/2} \neq 0$$

$$\alpha_n^{\beta_n} = e^{\beta_n \ln \alpha_n}$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

$\Rightarrow$ општи члан не тежи нули
Исто и за $x = -1/e$
$\Bigg\} \Rightarrow D_f = \left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$

3. Домаћи. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) x^n$

Диференцирање и интеграција степеног реда

Т Нека је R полупр. конв. степеног реда $\sum a_n (x-x_0)^n$.
Тада је f диференцијабилна на (x_0-r, x_0+R) и важи.
$\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$ $\left(\sum a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$.
Степени ред $\sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$ има полупречник конвергенције исто R, тј. степени ред се у унутрашњости домена ((x_0-R, x_0+R)) може диференцирати члан-по-члан.

ЛЕМА. $r<R$. Тада ред (*) равн. конв. $[x_0-r, x_0+r]$.
Специјално, пошто је $a_n(x-x_0)^n$ непр. $\Rightarrow f(x)=\sum a_n (x-x_0)^n$ је непр.

Доказ леме. $r<R$ $\quad x\in[x_0-r, x_0+r]$ $\quad r<r_1<R$

$$|a_n (x-x_0)^n| < \left|a_n \frac{r^n}{r_1^n}\right| |x-x_0|^n = \underbrace{|a_n r^n|}_{\text{ограничено}} \underbrace{\left|\frac{x-x_0}{r_1}\right|^n}_{q<1}$$

јер

$x=x_0+r \in D_f$ $\quad \sum a_n (x_0+r-x_0)^n$ конв.

$$\Downarrow$$

$a_n (x_0+r-x_0)^n \to 0$

$a_n r^n \to 0$

$\Rightarrow |a_n (x-x_0)^n| \le M\cdot q^n$, $\sum q^n$ конв.

$\Rightarrow$ на $[x_0-r, x_0+r]$ ред (*) равн. конв. по Вајерштрасу □

доказ T. $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \frac{1}{R}$

јер $\sqrt[n]{n} \to 1$

$\Rightarrow$ Полупречници конв. полазног реда и $\sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$ су једнаки.

$x \in (x_0-R, x_0+R) \Rightarrow \exists r < R \quad x \in (x_0-r, x_0+r) \subset [x_0-r, x_0+r]$

лема

$\Rightarrow$ на $[x_0-r, x_0+r]$ ст. реда $\sum n a_n (x-x_0)^{n-1}$ равн. конв.

$\Rightarrow$ може да се диф. члан-по-члан. $\square$

Последица. $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$ и R полупр. $(R>0)$

f је класе C^∞ ($\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \; \exists f^{(k)}(x)$)

и $f^{(k)}(x) = \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}}$ $\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$.

и полупр. конв. је исти и за овај степени ред.

доказ: индукцијом по k.

деф. Функције које су суме степеног реда се зову аналитичке.

T $R>0$ полупр. конв. $(*)$, $[a,b] \subseteq (x_0-R, x_0+R)$

$$\Rightarrow \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

доказ. $\exists r < R$, $[a,b] \subseteq [x_0-r, x_0+r]$ а овде ст. ред равн. конв. $\square$

T (Абелова теорема). Нека је $f(x) = \sum a_n (x-x_0)^n$ за $x \in (x_0-R, x_0+R)$

ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ $\left(\sum a_n (-1)^n R^n\right)$ конвергира, онда

степени ред $\sum a_n (x-x_0)^n$ равн. конв. на $[x_0, x_0+R]$ $([x_0-R, x_0])$

и f је непр. у $x = x_0 + R$ $(x = x_0 - R)$ тј. важи

$$\lim_{x\to(x_0+R)^-} f(x) = \sum a_n R^n \quad \left(\lim_{x\to(x_0-R)^+} f(x) = \sum a_n (-1)^n R^n \right).$$

Развијање функција у степени ред

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_k(x-x_0)^k + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$f'(x)$ у (x_0-R, x_0+R), $\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$$f''(x_0) = 2\cdot 1 \cdot a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$\vdots$

$= 0 \iff n = k$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$$

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\cdots 1 \cdot a_k \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Закључак: a_n је управо Тејлоров коеф. уз $(x-x_0)^n$

Степени ред је бесконачан Т. полином.

ЛЕМА. Нека је f ∞ диференцијабилна ф-ја

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ако за $h>0$, $\exists M>0$ тд. $|f^{(n)}(x)| \le M$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x \in [x_0-h, x_0+h]$

Тада $\forall x \in [x_0-h, x_0+h]$ $R_n(x) \to 0$, $n\to\infty$, тј.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \square$$

Доказ. остатак у Лагр. облику

$$|R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq M \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

ξ између x_0 и x

ВАЖНИ.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (x_0 = 0 \quad f^{(k)} = e^x, \ f^{(k)}(0) = 1)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left(x_0 = 0, \ f^{(n)}(x) = \begin{cases} \pm \sin x, & k = \text{парно} \\ \pm \cos x, & k = \text{непарно} \end{cases}\right)$$

у зависности од $k \bmod 4$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1]$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad x \in (-1,1) \quad \forall \alpha$$

$$(x = 1 : \ \alpha \geq -1) \qquad (x = -1 : \ \alpha \geq 0)$$

Специјално, за $x = -t$ $\alpha = -1$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{-1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-n)}{n!} = \frac{(-1)^n n!}{n!} = (-1)^n$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Доказаћемо из Леме да је $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$, $\quad f^{(n)}(x) = e^x$, $\quad x_0 = 0 \quad |f^{(n)}(x)| \le \underbrace{e^h}_{=:M}$ огр. на $[x_0-h, x_0+h] = [-h, h]$

$$\Rightarrow f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in [-h, h] \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}.$$

Домаћи. Доказати да важе наведени развоји за $\sin x$ и $\cos x$.

Задаци. Развити у степене редове.

1. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$

геом. ред

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \Rightarrow$$

$$x \in (-1,1): \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt =$$

Њутн – Лајбниц

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

Напомена: $x_0 = 0$, f парна $\Rightarrow a_{2n+1} = 0$
f непарна $\Rightarrow a_{2n} = 0$

(g непарна $\Rightarrow g(0) = 0$)
f парна
$\Rightarrow f^{(2n)}$ парна
$f^{(2n+1)}$ непарна)

2. Домаћи. $f(x) = \arcsin x$ $\quad \left(f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+t)^{\alpha} \quad t = -x^2, \ \alpha = -1/2 \right)$

(3.) $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sum \dfrac{x^n}{n!} - \sum \dfrac{(-x)^n}{n!}\right)$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n!} x^n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Задаци. Сумирати следеће редова

(1.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{(2n-1)}\, x^{2n-2}}{\cancel{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} (x^2)^m = \frac{1}{1-x^2}$$

$m = n-1$
$2n-2 = 2m$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

$$= 0 + \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \int_0^x \frac{1+t+1-t}{(1+t)(1-t)}\,dt \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^x \frac{dt}{1-t} + \int_0^x \frac{dt}{1+t}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\ln|x+1| - \ln|t-1|\Big|_{t=0}^{x}\right\}$$

$$= \ln\sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$$

(2.) домаћи: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$

(3.) домаћи: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$