Примене на редове:

- Непрекидност: Ако је $f_n(x)$ непр. у $x=x_0$ и $\sum f_n(x)$ равном. на A, $x_0 \in A$

  $\Rightarrow$ $f(x) := \sum f_n(x)$ непр. у x_0.

- Лимес (комутирање лимеса): $f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} S_N(x)$, где је x_0 т. нагом. скупа A

  и $\sum f_n(x)$ равн. конв. на A, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$ $\left(\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} S_N(x) = b_N\right)$

  и $\exists \lim\limits_{N\to\infty} b_N$ $(\Leftrightarrow \sum a_n$ конвергира. Тада $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim\limits_{N\to\infty} b_N = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Другим речима, ако $\sum f_n(x)$ равн. конв. и ред $\sum a_n$ конвергира

$$\left(a_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Коначно lim улази под знак Σ или lim и Σ могу да замене места.

ИНТЕГРАБИЛНОСТ ГРАНИЧНЕ ФЈЕ $\left(\lim \int_a^b = \int_a^b \lim\right)$

Знамо: f_n непр. на $[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ f непр. на $[a,b]$

Т f_n интеграбилне на $[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ f интеграбилна

и $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказ. део о интеграбилности не доказујемо (знамо за непрекидне)

$$\Big| \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,dx}_{a_n} - \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{?\ \lim a_n} \Big| \underset{\substack{\text{неједн. } \Delta \\ \text{за интеграле}}}{\leq} \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{< \varepsilon/(b-a)}\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ дато

$f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in [a,b]$ $\square$

T2 f_n интегр. на $[a,b]$ и $\sum f_n(x)$ равн. конв. на $[a,b]$.
Тада је и $f(x) := \sum f_n(x)$ интеграбилна и важи

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx .$$

Терминологија:
- ред и Σ могу да замене места
- Σ „улази" под знак $\int$
- ред може да се интегрише члан-по-члан

Доказ. $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, $S_N(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$

из T1 $\Rightarrow$ $f(x)$ интегр. и $\underbrace{\lim_{N\to\infty} \int_a^b S_N(x)\,dx}_{Л} = \underbrace{\int_a^b \lim_{N\to\infty} S_N(x)\,dx}_{Д}$

$$Л = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$Д = \int_a^b \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx \qquad \square$$

Диференцијабилност граничне ф-је
(замена места lim и извода)

T3 f_n су диференцијабилне на (a,b).
$x_0 \in [a,b]$, $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A$. (само у једној тачки)
$f_n' \rightrightarrows g$ на $[a,b]$. (изводи равн. конв.)
Тада, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$, f диференцијабилна и $f' = g$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

лимес и извод су

Запамтити места!

Доказ. Доказаћемо са мало јачим претпоставкама, тј. да су f_n класе C^1 (f_n' су непрекидне на $[a,b]$)

Јер хоћемо да применимо T1

$$\underbrace{f_n(x) - f_n(x_0)}_{\text{конв.}} = \underbrace{\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt}_{\text{конв.}} \Big/ \lim_{n\to\infty}, \qquad f_n' \rightrightarrows g$$

$\forall x \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

$$f(x) - A = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \underset{f_n \rightrightarrows g}{=} \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

$$f(x) = A + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt, \quad A = f(x_0), \quad f \text{ је диф. и } f'(x) = g(x)$$

основне Т. диф. рачуна.

Доказали смо $f_n \to f$, f је диф. и $g = \lim(f_n') = f' = (\lim f_n)'$

Остало је $f_n \rightrightarrows f$

$$|f_n(x) - f(x)| \overset{\text{Н.-Л.}}{=} \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \right|$$

$$\le |f_n(x_0) - A| + \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\,dt < \varepsilon/2 + \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,dt = \varepsilon/2 + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(x-x_0)}{b-a} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\exists n_1 \ \forall n \ge n_1$ је $|f_n(x_0) - A| < \varepsilon/2$

$\exists n_2 \ \forall n \ge n_2$ је $\forall t \in [a,b]$ $|f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon / 2(b-a)$

$n_0 \ge \max\{n_1, n_2\}$ □

Т4 f_n диф. на $[a,b]$ и $\sum f_n(x_0)$ конв. за неко $x_0 \in [a,b]$, $\sum f_n'(x)$ равн. конвергира на $[a,b]$. Тада $\sum f_n(x)$ равн. конв. на $[a,b]$ ка диференцијабилној функцији и важи

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$ ($\sum$ и извод могу да замене места).

Доказ. Домаћи (применити Т3 на $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$)

Терминологија: Ред може да се диференцира члан-по-члан.

Задаци.

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. Показати да је f дефинисана и непрекидно диференцијабилна на $\mathbb{R}$.

дефинисаност: скуп свих x за које ред конвергира (обично)

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \quad \sum \frac{1}{n^3} \text{ конв.} \Rightarrow \sum \frac{\sin(nx)}{n^3} \text{ (равн.) конв. на } \mathbb{R}$$

диференцијабилност: $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ јесу диф. на $\mathbb{R}$

$\sum f_n(x_0)$ конв. за неко x_0 (важи $\forall x_0$)

$\sum f_n'(x)$ равн. конв. (где?)

$$f_n'(x) = \frac{\cos(nx)\cdot n}{n^3} = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ конв.} \Rightarrow \sum f_n'(x) \text{ равн. конв. на } \mathbb{R}$$ по Вајерштрасу

Доказали смо да је $f(x)$ диф, $f'(x) = \sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$

Непрекидно диф? јесте, јер $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ равн. конв, ф-је $\frac{\cos(nx)}{n^2}$ су непр. $\Rightarrow$ f' је исто непрекидна

(непр. гр. ф-је)

2. Може ли се ред $\sum \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ диференцирати члан-по-члан?

$f(x) = \sum \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ Где ово конвергира?

$\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ је сталног знака, $x > 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} > 0$

$x < 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} < 0$

$\Rightarrow$ може неки поредбени тест, $\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \sim \frac{x}{n^2}$ $n \to \infty$

$\sum \frac{x}{n^2}$ конв. $\Rightarrow \sum \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ конв. за $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{aligned} &\operatorname{arctg} t \sim t \qquad t \to 0 \\ &\operatorname{arctg} t = \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0} + \underbrace{(\operatorname{arctg} t)'\big|_{t=0}}_{=\frac{1}{1+t^2}\big|_{t=0} = 1} \cdot t + o(t), \quad t \to 0 \end{aligned} \right)$$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

диф. члан-по-члан:

(1) $\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} = f_n(x)$ су диференц.

(2) $\sum \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ конв. у x_0 (за било који x_0)

(3) $f_n'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n^2}$ да ли овај равн. конв. (негде?)

$$|f_n'(x)| = \underbrace{\frac{1}{1+\frac{x^2}{n^2}}}_{\le 1} \cdot \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum f_n'(x) \text{ конв. равн. на } \mathbb{R}.$$

(Вајерштрас)

Може!

3. $a_n(x) := n^{\alpha} x e^{-nx}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. За које α

(а) $a_n(x)$ конвергира на $[0,1]$?   реш. $\alpha \in A$

$\cup\!|$

(б) $a_n(x)$ равн. конв. на $[0,1]$?   реш. $\alpha \in B$

$\overset{?}{\cup\!|}$

(в) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 a_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} a_n(x)\,dx$?   реш. $\alpha \in C$

(a) $n^{\alpha} x e^{-nx}$ $\quad x>0 \quad n^{\alpha}e^{-nx} = \dfrac{n^{\alpha}}{(e^{x})^{n}} = \dfrac{n^{\alpha}}{a^{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$a>1$

$x=0 \quad a_n(0)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (A=\mathbb{R})$

б) $a_n \rightrightarrows 0$ за које α?

$|a_n(x) - 0| = n^{\alpha} x e^{-nx}$ max овог израза $x\in[0,1]$

$a_n'(x) = n^{\alpha}e^{-nx} + n^{\alpha} x e^{-nx} \cdot (-n) = n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)$

$a_n'(x) \begin{cases} >0, & x\in[0,1/n) \\ =0, & x=1/n \\ <0, & x\in(1/n,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n \uparrow \text{ на } [0,1/n] \\ a_n \downarrow \text{ на } [1/n,1] \end{array}$

$\Rightarrow \max a_n(x) = a_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha}\frac{1}{n}e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = n^{\alpha-1}\cdot e^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Leftrightarrow \alpha<1$

a_n равн. конв. $\Leftrightarrow \alpha<1 \qquad B=(-\infty,1)$

в) $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} a_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 a_n(x)\,dx \overset{?}{=} 0$ за које α?

$\displaystyle\int_0^1 a_n(x)\,dx = \int_0^1 n^{\alpha} x e^{-nx}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} x=u & v=-\frac{1}{n}e^{-nx} \\ e^{-nx}=dv & du=dx \end{array} \right\}$

$\displaystyle = n^{\alpha}\left\{ -\frac{1}{n} x e^{-nx}\Big|_{x=0}^{1} + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}\,dx \right\} =$

$\displaystyle = n^{\alpha-1}\left\{ -e^{-n} + 0 + \frac{-1}{n}e^{-nx}\Big|_{x=0}^{1} \right\} =$

$$= n^{\alpha-1}\left\{-e^{-n} - \frac{1}{n}\left(e^{-n}-1\right)\right\} = \underbrace{-n^{\alpha-1}e^{-n} - n^{\alpha-2}e^{-n} + n^{\alpha-2}}_{\text{За које } \alpha \text{ ово } \to 0 \ (n\to\infty)?}$$

$\frac{n^{\alpha-1}}{e^n}$, $\frac{n^{\alpha-2}}{e^n}$ теже нули, $n\to\infty$ $\forall \alpha$

$n^{\alpha-2} \to 0 \iff \boxed{\alpha < 2}$ $\qquad C = (-\infty, 2)$

4. Доказати да $\sum \frac{x^n}{n!}$ апсолутно конв. на $\mathbb{R}$.

— || ——— не конв. равн. на $\mathbb{R}$

— || ——— да је $f(x) = \sum \frac{x^n}{n!}$ непр. ф-ја

— || ——— $\sum \frac{x^n}{n!}$ може да се диференцира члан-по-члан.

- $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ (фиксирано x, обичан ред)

$x \neq 0$: $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1 \Rightarrow$ конв. за $\forall$ фикс. x

- $\frac{x^n}{n!} \not\rightrightarrows 0$ на $\mathbb{R}$ јер $x = n$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \geq \frac{n^n}{n!} > 1$$

- ВАЖНО: $\sum f_n(x)$ равн. конв. на $\forall [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

јер $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{M^n}{n!}$, $M = \max\{|a|, |b|\}$

а $\sum \frac{M^n}{n!}$ конв. $\qquad$ (Вајерштрас)

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists [a,b]$ $x_0 \in (a,b)$ нпр. $x_0 \in [x_0-1, x_0+1]$

Ако $\sum f_n(x)$ равн. на $[a,b]$ и f_n су непр. на $[a,b]$

$\Rightarrow$ $\sum f_n(x)$ непр. у x_0

Ако ово важи $\forall x_0$ $\Rightarrow \sum f_n$ је непр. на $\mathbb{R}$.

$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ су диф.

$\sum f_n(x_0)$ конв. за $\forall x_0$

$f_n' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ опет, $f_n' \not\rightrightarrows 0$ $n \to \infty$

$f_n'(n) = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} > 1$

$\forall x_1 \in [x_1-1, x_1+1]$ и $\sum f_n'(x)$ равн. конв. на $[x_1-1, x_1+1]$ (на сваком огр. интервалу)

$\Rightarrow \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum f_n'(x)$ за $\forall x \in (x_1-1, x_1+1)$

специјално и за $x = x_1$

$\Rightarrow \sum f_n$ може да се диф. члан-по-члан.

Не примењујемо Т4 на цeлом домену, али можемо да је применимо на сваки огр. интервал садржан у домену. $\forall x \in D_f$ $\exists$ огр. инт. $I \ni x$ $\Rightarrow$ ово важи $\forall x \in D_f$.

СТЕПЕНИ РЕДОВИ

деф. $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ степени ред.

x_0 – центар степеног реда.

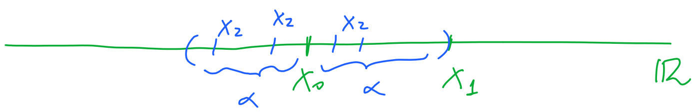
Где конв. степени ред?

Деф. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n (x-x_0)^n$ конв.$\}$ = област конв. ст. реда $\left(= D_f,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)$

$D_f \neq \emptyset$ јер $x = x_0$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0$ конв.

Т. Ако ст. ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ (*)

конвергира за $x = x_1$ $\Rightarrow$ (*) апсолутно конв. $\forall x_2$ за које важи $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$.



Доказ. поредбени тест, $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$

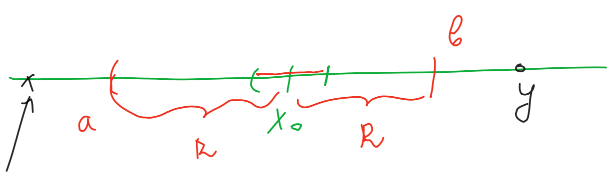
$$|a_n (x_2-x_0)^n| = \underbrace{|a_n (x_1-x_0)^n|}_{\text{огран.}} \cdot \left| \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n \leq M \cdot q^n, \quad \left| \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right| = q < 1$$

огран. $\Leftarrow$ $\xrightarrow{n\to\infty} 0$ општи члан конв. реда

$\sum M q^n$ конв. $\Rightarrow$ $\sum |a_n (x_2-x_0)^n|$ конв. (по поредб.)

$\Rightarrow$ $\sum a_n (x-x_0)^n$ апс. конв. $\square$

Последица. Област конв. ст. реда је интервал чији је центар тачка x_0.



$b := \sup\{x \mid$ ред (*) конв. у $x\}$

див. $(x < x_0 - R)$ јер би у супротном, конв. и у тачки $y > \ell$ □

Примери Шта је D_f

(а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ (б) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$ (в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

(г) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ (д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (ђ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$ $(0! := 1)$

У свим задацима је $x_0=0$, очекујемо да D_f буде облика $(-R,R)$, $[-R,R]$, $[-R,R)$, $(-R,R]$, $\{0\}$ или $\mathbb{R}$ (за неко $R>0$)

а) За које x, $\frac{x^n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$? $\iff$ $x\in[-1,1]$

(ако је $|x|>1 \Rightarrow \frac{|x|^n}{n}\to\infty,\ n\to\infty$)

$\ln n \ll n^{\alpha} \ll a^n \ll n!$ $\alpha>0$, $a>1$

$a_n \ll b_n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

$x\in(-1,1)$ $\left|\frac{x^n}{n}\right|\le|x|^n$, $\sum|x|^n$ конв. $(|x|\in[0,1))$

$x=1$

$\sum\frac{1}{n}$ дивергира (хармонијски)

$x=-1$

$\sum\frac{(-1)^n}{n}$ конв. по Лајбницу

$\Rightarrow D_f=[-1,1)$

б) $\sum\frac{(-1)^n x^n}{n}=\sum\frac{(-x)^n}{n}$ $t=-x$

$$= \sum \frac{t^n}{n} \quad \text{конв. за} \quad t \in [-1,1)$$

$$\iff x \in (-1,1]$$

$$D_f = (-1,1]$$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\qquad |x| > 1 \Rightarrow \frac{|x|^n}{n!} \to \infty, \quad n \to \infty$

$x \in [-1,1]$ $\qquad \left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ конв.

$$D_f = [-1,1]$$

г) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N \to \infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ $\exists \iff |x| < 1$ (радили смо)

$$D_f = (-1,1)$$

д) радили смо (данас) конв. на $\mathbb{R}$

$$D_f = \mathbb{R}$$

ђ) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ $\qquad |x| \geq 1 \quad |n!\, x^n| \geq n! \longrightarrow \infty \quad n \to \infty$

$|x| < 1 \quad |n!\, x^n| = \frac{n!}{a^n} \longrightarrow \infty \quad n \to \infty$

$a = \frac{1}{|x|} > 1$

$$\left(\frac{n!}{a^n} = \underbrace{\boxed{\frac{1 \cdot 2 \cdots k}{a \cdot a \cdots a}}}_{=:c} \cdot \frac{(k+1) \cdots n}{a \cdots a} \geq c\, \frac{k+1}{a} \frac{k+1}{a} \cdots \frac{k+1}{a} = c \cdot q^{n-k} \longrightarrow \infty \right)$$

$k+1 > a$

$q := \frac{k+1}{a} > 1$

$$\Rightarrow D_f = \{0\}$$

Ово су јединих 6 могућности изгледа области конв. ст. реда