Име и презиме: ______________________________

Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

Задатак **1.** Уписати знак $\times$ у квадратић испред формуле која је еквивалентна формули $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. [1 поен – сви тачни одговори и ниједан нетачан]

☒ $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ ☐ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ ☐ $r \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ ☒ $\neg r \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$ ☐ $(\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg p$

Напомена: $\neg q \vee \neg p \vee r$ $\neg(\neg p \vee q) \vee r$ $\neg r \vee \neg q \vee p$ $\neg\neg r \vee \neg q \vee \neg p$ $\neg(\neg\neg r \vee \neg q) \vee \neg p$

Задатак **2.** Над алфабетом $\{\mathsf{S}, a, b, c\}$ дата су правила:

$$\mathsf{S} \to aa\mathsf{S}b,\ \mathsf{S} \to c.$$

Доказати да се из S може доказати реч w акко је w облика $a^{2n}\mathsf{S}b^n$ или $a^{2n}cb^n$, за неко $n \geqslant 0$.
Доказ: [1 поен]

(⇒) Индукцијом по дужини извођења речи w из S.
БИ. Ако је дужина извођења речи w из S једнака 0, онда је w реч S, одн. $a^{2\cdot 0}Sb^0$.
ИП. Претпоставимо да је тврђење тачно за све речи за које постоји извођење из S дужине n.
Нека је w реч за коју постоји извођење из S дужине $n+1$:

$$S \to w_1 \to w_2 \to \dots \to w_n \xrightarrow{*} w$$

за реч w_n постоји извођење из S дужине n, па према (ИП) w_n је облика $a^{2n}Sb^n$ или $a^{2n}cb^n$. Друга могућност отпада јер се на ту реч не може применити ниједно правило. Дакле, w_n је облика $a^{2n}Sb^n$. Разликујемо два случаја у зависности од правила (*)
1° Ако је * правило $S \to aaSb$, онда је w реч $a^{2(n+1)}Sb^{n+1}$.
2° Ако је * правило $S \to c$, онда је w реч $a^{2n}cb^n$.

(⇐) Индукцијом по n.
БИ. За $n=0$, речи $a^{2\cdot 0}Sb^0$ и $a^{2\cdot 0}cb^0$ су заправо S и c и обе ове речи се могу извести из S.
ИП. Претпоставимо да се речи $a^{2n}Sb^n$ и $a^{2n}cb^n$ могу извести из S.
Тада се из S могу извести и речи $a^{2(n+1)}Sb^{n+1}$ и $a^{2(n+1)}cb^{n+1}$.

$$S \to \dots \to a^{2n}Sb^n \to a^{2(n+1)}Sb^{n+1}$$

$$S \to \dots \to a^{2n}Sb^n \to a^{2(n+1)}Sb^{n+1} \to a^{2(n+1)}cb^{n+1}.$$

Задатак **3.** Формална теорија $\mathcal{F}$ је одређена на следећи начин:

- алфабет садржи три симбола, $\{|, *, =\}$;
- формуле су све речи облика $x * y = z$, где су x, y, z речи записане само симболом $|$;
- једина аксиома је формула $|| * | = |$;
- правила извођења су:

$$(\text{R1})\ \frac{x * y = z}{x| * y = z|} \qquad (\text{R2})\ \frac{x * y = z|}{x * y| = z}$$

Доказати $\vdash_{\mathcal{F}} ||||| * || = |||$.

Доказ: [1 поен]

1. $|| * | = |$ аксиома
2. $||| * | = ||$ R1 на 1.
3. $|||| * | = |||$ R1 на 2.
4. $||||| * | = ||||$ R1 на 3
5. $||||| * || = |||$ R2 на 4.

Задатак **4.** Доказати $\vdash (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$ користећи само основна правила природне дедукције.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\,(\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{L}}) \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\,(\wedge_{\mathrm{E}}^{\mathrm{D}}) \qquad \frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}\,(\wedge_{\mathrm{U}}) \qquad \frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\,(\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{L}}) \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}\,(\vee_{\mathrm{U}}^{\mathrm{D}})$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{|c}\alpha\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{|c}\beta\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,(\vee_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}\,(\Rightarrow_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\begin{array}{|c}\alpha\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta}\,(\Rightarrow_{\mathrm{U}}) \qquad \frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot}\,(\neg_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\begin{array}{|c}\alpha\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\alpha}\,(\neg_{\mathrm{U}}) \qquad \frac{\begin{array}{|c}\neg\alpha\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\alpha}\,(\bot_{\mathrm{C}})$$

Доказ: [2 поена]

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)$ претпоставка.
2. $p \Rightarrow q$ $\wedge^{L}_{E}$, 1
3. $r \Rightarrow q$ $\wedge^{D}_{E}$, 1
4. $p \vee r$ додатна претпоставка
5. p додатна претпоставка
6. q $\Rightarrow_E$, 5, 2
7. r додатна претпоставка
8. q $\Rightarrow_E$, 7, 3
9. q $\vee_E$, 4, 5-6, 7-8
10. $p \vee r \Rightarrow q$ $\Rightarrow_U$, 4-9
11. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$ $\Rightarrow_U$, 1-10