

Име и презиме: _____

Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

ЗАДАТАК 1. Над речима алфабета $\{A, B\}$ дозвољене су следеће трансформације: избрисати два суседна слова BB или два суседна слова AB заменити са $BBBA$; тј.

$$AB \rightarrow BBBA, BB \rightarrow .$$

Уписати знак \times у квадратић испред речи која се може добити из $ABBB$ применом наведених правила [1 поен - сви тачни одговори и ниједан нетачан]:

$BBBA$ BA $BBBBA$ $BBBBBA$ $ABAB$

ЗАДАТАК 2. Сабирање природних бројева је дефинисано једнакостима (при чему је \bar{n} је следбеник броја n):

$$(Rec1) \quad m + 0 = m$$

$$(Rec2) \quad m + \bar{n} = \overline{m+n}$$

Доказати да је $\overline{m+n} = m + \bar{n}$, за све природне бројеве m и n .

Доказ: [1 поен]

Индукцијом по n .

$$(БН) \quad n=0 \quad \overline{m+0} \stackrel{Rec1}{=} \overline{m} \quad m+\overline{0} \stackrel{Rec2}{=} m+0 \stackrel{Rec1}{=} m$$

$$(ИП) \quad \overline{m+n} = m + \bar{n}$$

$$\begin{aligned} \overline{m+n} &= \overline{\overline{m+n}} \quad Rec2 \\ &= \overline{m+\bar{n}} \quad ИП \\ &= m + \overline{\bar{n}} \quad Rec2. \end{aligned}$$

Напомена за Задатак 1: (1) $AB \rightarrow BBBA$ (2) $BB \rightarrow$

$$ABBB \xrightarrow{(2)} AB \xrightarrow{(1)} BBBA$$

$$ABBB \xrightarrow{(2)} AB \xrightarrow{(1)} BBBA \xrightarrow{(2)} BA$$

$$ABBB \xrightarrow{(1)} BBBA \xrightarrow{(1)} BBBA \xrightarrow{(2)} BBBA \xrightarrow{(2)} BBBA \xrightarrow{(1)} BBBA$$

$ABBB \rightarrow BBBA$ јер правила (1) и (2) чувају парност дужине речи

$ABBB \rightarrow ABAB$ јер правила (1) и (2) чувају број слова A .

ЗАДАТАК 3. Одредити конјунктивну нормалну форму (КНФ) формуле $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$.

Решење: [1 поен - тачно решење и коректан поступак]

$$\begin{aligned}
 (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r &\equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow r \\
 &\equiv \neg [(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)] \vee r \equiv [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)] \vee r \\
 &\equiv [(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p)] \vee r \equiv [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)] \vee r \\
 &\equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee r \\
 &\equiv [(p \vee q) \wedge \top \wedge \top \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee r \\
 &\equiv [(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)] \vee r \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)
 \end{aligned}$$

ЗАДАТАК 4. Доказати $\vdash (p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q)$ користећи само основна правила природне дедукције.

$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge^L_E)$	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge^D_E)$	$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge^U)$	$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} (\vee^L_U)$	$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} (\vee^D_U)$
$\frac{\alpha \vee \beta \quad \left \begin{array}{l} \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right \left \begin{array}{l} \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \right.}{\gamma} (\vee^E)$	$\frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta} (\Rightarrow^E)$	$\frac{\left \begin{array}{l} \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array} \right.}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Rightarrow^U)$	$\frac{\alpha \quad \neg \alpha}{\perp} (\neg^E)$	$\frac{\left \begin{array}{l} \alpha \\ \vdots \\ \perp \end{array} \right.}{\neg \alpha} (\neg^U)$
				$\frac{\left \begin{array}{l} \neg \alpha \\ \vdots \\ \perp \end{array} \right.}{\alpha} (\perp^C)$

Доказ: [2 поена]

1. $(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q)$ Додатна претпоставка
2. $p \wedge r$ Додатна претпоставка
3. p $\wedge^L_E, 2$
4. r $\wedge^D_E, 2$
5. $p \Rightarrow q$ Додатна \neg .
6. q $\Rightarrow^E, 3, 5$
7. $r \Rightarrow q$ Додатна \neg .
8. q $\Rightarrow^E, 4, 7$
9. q $\vee^E, 1, 5-6, 7-8$
10. $p \wedge r \Rightarrow q$ $\Rightarrow^U, 2-9$
11. $(p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q)$ $\Rightarrow^U, 1-10$