Postoji li opšti postupak za rešavanje matematičkih zadataka?

Nebojša Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

08.04.2017.

...opšti postupak za rešavanje srodnih zadataka?

- Nadji NZD dva data prirodna broja. [Smatra se da je **Euklidov algoritam** najstariji netrivijalni algoritam.]
- Odredi približnu vrednost kvadratnog korena datog decimalnog broja na zadati broj decimala.
- Reši datu linearnu (kvadratnu) jednačinu.
- Nadji izvod datog polinoma.
- Ispitaj da li je data iskazna formula tautologija.
- Reši Rubikovu kocku.

  ⋮

Kongres matematičara – 1928. godina, Bolonja

Entscheidungsproblem ili 'problem odlučivosti'

Grubo rečeno, Hilbert je tražio opšti postupak za rešavanje matematičkih problema (zadataka) koji pripadaju nekoj širokoj, ali dobro definisanoj klasi.

David Hilbert
(1862-1943)

Euklidov algoritam

Euklidov algoritam je postupak za nalaženje najvećeg zajedničkog delioca dva broja.

Primer.

$\mathbf{NZD}(942, 444) = ?$

Euklidov algoritam

EUKLIDOV ALGORITAM je postupak za nalaženje najvećeg zajedničkog delioca dva broja.

Primer.

$\mathbf{NZD}(942, 444) = ?$

$942 = 2 \cdot 444 + 54$

$$\mathbf{NZD}(942, 444) = \mathbf{NZD}(444, 54)$$

Euklidov algoritam

EUKLIDOV ALGORITAM je postupak za nalaženje najvećeg zajedničkog delioca dva broja.

Primer.

$\mathbf{NZD}(942,444) = ?$

$942 = 2 \cdot 444 + 54$

$\mathbf{NZD}(942,444) = \mathbf{NZD}(444,54)$

$444 = 8 \cdot 54 + 12$

$\mathbf{NZD}(444,54) = \mathbf{NZD}(54,12)$

$54 = 4 \cdot 12 + 6$

$\mathbf{NZD}(54,12) = \mathbf{NZD}(12,6)$

$12 = 2 \cdot 6 + 0$

$\mathbf{NZD}(12,6) = \mathbf{NZD}(6,0) = 6$

$\boxed{\mathbf{NZD}(942,444) = 6}$

Euklidov algoritam

1. $\mathbf{NZD}(m, 0) = m, \ m \geqslant 0$
2. $\mathbf{NZD}(m, n) = \mathbf{NZD}(n, m \bmod n), \ m \geqslant 0, n > 0$

[$m \bmod n =$ "ostatak pri deljenju m sa n"]

Primer.

$\mathbf{NZD}(942, 444) = ?$

Euklidov algoritam

1. $\mathbf{NZD}(m,0) = m, \; m \geqslant 0$
2. $\mathbf{NZD}(m,n) = \mathbf{NZD}(n, m \,\mathbf{mod}\, n), \; m \geqslant 0, n > 0$

[$m \,\mathbf{mod}\, n =$ "ostatak pri deljenju m sa n"]

Primer.

$\mathbf{NZD}(942, 444) = ?$

$= \mathbf{NZD}(942, 444) = \mathbf{NZD}(444, 942 \,\mathbf{mod}\, 444)$ Pravilo 2.

$= \mathbf{NZD}(444, 54)$

[jer je $942 = 2 \cdot 444 + 54$, pa je $942 \,\mathbf{mod}\, 444 = 54$]

Euklidov algoritam

1. $\mathbf{NZD}(m, 0) = m, \ m \geqslant 0$
2. $\mathbf{NZD}(m, n) = \mathbf{NZD}(n, m \,\mathbf{mod}\, n), \ m \geqslant 0, n > 0$

[$m \,\mathbf{mod}\, n =$ "ostatak pri deljenju m sa n"]

Primer.

$\mathbf{NZD}(942, 444) = ?$

$= \mathbf{NZD}(942, 444) = \mathbf{NZD}(444, 942 \,\mathbf{mod}\, 444)$ Pravilo 2.

$= \mathbf{NZD}(444, 54)$

[jer je $942 = 2 \cdot 444 + 54$, pa je $942 \,\mathbf{mod}\, 444 = 54$]

$= \mathbf{NZD}(444, 54) = \mathbf{NZD}(54, 444 \,\mathbf{mod}\, 54) = \mathbf{NZD}(54, 12)$ Pravilo 2.

$= \mathbf{NZD}(54, 12) = \mathbf{NZD}(12, 54 \,\mathbf{mod}\, 12) = \mathbf{NZD}(12, 6)$ Pravilo 2.

$= \mathbf{NZD}(12, 6) = \mathbf{NZD}(6, 12 \,\mathbf{mod}\, 6) = \mathbf{NZD}(6, 0)$ Pravilo 2.

Euklidov algoritam

1. $\mathbf{NZD}(m, 0) = m, \; m \geqslant 0$
2. $\mathbf{NZD}(m, n) = \mathbf{NZD}(n, m \,\mathbf{mod}\, n), \; m \geqslant 0, n > 0$

[$m \,\mathbf{mod}\, n =$ "ostatak pri deljenju m sa n"]

Primer.

$\mathbf{NZD}(942, 444) = ?$

$= \mathbf{NZD}(942, 444) = \mathbf{NZD}(444, 942 \,\mathbf{mod}\, 444)$ Pravilo 2.

$= \mathbf{NZD}(444, 54)$

[jer je $942 = 2 \cdot 444 + 54$, pa je $942 \,\mathbf{mod}\, 444 = 54$]

$= \mathbf{NZD}(444, 54) = \mathbf{NZD}(54, 444 \,\mathbf{mod}\, 54) = \mathbf{NZD}(54, 12)$ Pravilo 2.

$= \mathbf{NZD}(54, 12) = \mathbf{NZD}(12, 54 \,\mathbf{mod}\, 12) = \mathbf{NZD}(12, 6)$ Pravilo 2.

$= \mathbf{NZD}(12, 6) = \mathbf{NZD}(6, 12 \,\mathbf{mod}\, 6) = \mathbf{NZD}(6, 0)$ Pravilo 2.

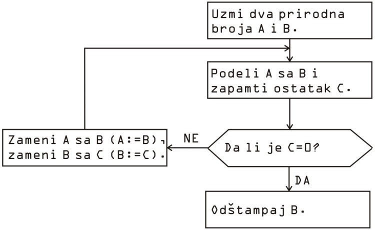
$= \mathbf{NZD}(6, 0) = 6$ Pravilo 1.

Euklidov algoritam

1. $\mathbf{NZD}(m, 0) = m, \ m \geqslant 0$
2. $\mathbf{NZD}(m, n) = \mathbf{NZD}(n, m \ \mathbf{mod} \ n), \ m \geqslant 0, n > 0$

E1 Podeli A sa B i zapamti ostatak C.

E2 Ako je $C = 0$, završi postupak i štampaj B; ako je $C > 0$, stavi da je $A := B$ i $B := C$ i idi na E1.



Linearna Diofantova jednačina

ZADATAK. Odrediti cele brojeve x i y takve da je

$$942x + 444y = 6.$$

Linearna Diofantova jednačina

ZADATAK. Odrediti cele brojeve x i y takve da je

$$942x + 444y = 6.$$

$\mathrm{NZD}(942, 444) = 6$;

$$\begin{aligned}
54 &= 942 + (-2) \cdot 444 \\
12 &= 444 + (-8) \cdot (942 + (-2) \cdot 444) = (-8) \cdot 942 + 17 \cdot 444 \\
\underline{6} &= 54 + (-4) \cdot 12 = \underline{33 \cdot 942 + (-70) \cdot 444}.
\end{aligned}$$

Linearna Diofantova jednačina

Zadatak. Odrediti cele brojeve x i y takve da je

$$942x + 444y = 6.$$

$\mathrm{NZD}(942, 444) = 6$;

$$\begin{aligned} 54 &= 942 + (-2) \cdot 444 \\ 12 &= 444 + (-8) \cdot (942 + (-2) \cdot 444) = (-8) \cdot 942 + 17 \cdot 444 \\ \underline{6} &= 54 + (-4) \cdot 12 = \underline{33 \cdot 942 + (-70) \cdot 444}. \end{aligned}$$

Teorema. Linearna Diofantova jednačina $ax + by = c$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$ ako i samo ako $\mathrm{NZD}(a, b) \mid c$.

Linearna Diofantova jednačina

ZADATAK. Odrediti cele brojeve x i y takve da je

$$942x + 444y = 6.$$

$\mathrm{NZD}(942, 444) = 6$;

$$\begin{aligned} 54 &= 942 + (-2) \cdot 444 \\ 12 &= 444 + (-8) \cdot (942 + (-2) \cdot 444) = (-8) \cdot 942 + 17 \cdot 444 \\ \underline{6} &= 54 + (-4) \cdot 12 = \underline{33 \cdot 942 + (-70) \cdot 444}. \end{aligned}$$

TEOREMA. Linearna Diofantova jednačina $ax + by = c$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$ ako i samo ako $\mathrm{NZD}(a, b) \mid c$.

ZADATAK. Da li jednačina $942x + 444y = 30$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$?

Linearna Diofantova jednačina

ZADATAK. Odrediti cele brojeve x i y takve da je

$$942x + 444y = 6.$$

$\mathrm{NZD}(942, 444) = 6;$

$$\begin{aligned} 54 &= 942 + (-2) \cdot 444 \\ 12 &= 444 + (-8) \cdot (942 + (-2) \cdot 444) = (-8) \cdot 942 + 17 \cdot 444 \\ \underline{6} &= 54 + (-4) \cdot 12 = \underline{33 \cdot 942 + (-70) \cdot 444}. \end{aligned}$$

TEOREMA. Linearna Diofantova jednačina $ax + by = c$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$ ako i samo ako $\mathrm{NZD}(a, b) \mid c$.

ZADATAK. Da li jednačina $942x + 444y = 30$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$?

DA: $\mathrm{NZD}(942, 444) = 6 \mid 30$

Linearna Diofantova jednačina

ZADATAK. Odrediti cele brojeve x i y takve da je

$$942x + 444y = 6.$$

$\mathrm{NZD}(942, 444) = 6$;

$$\begin{aligned}
54 &= 942 + (-2)\cdot 444\\
12 &= 444 + (-8)\cdot(942 + (-2)\cdot 444) = (-8)\cdot 942 + 17\cdot 444\\
\underline{6} &= 54 + (-4)\cdot 12 = \underline{33\cdot 942 + (-70)\cdot 444}.
\end{aligned}$$

TEOREMA. Linearna Diofantova jednačina $ax + by = c$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$ ako i samo ako $\mathrm{NZD}(a, b) \mid c$.

ZADATAK. Da li jednačina $942x + 444y = 30$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$?

DA: $\mathrm{NZD}(942, 444) = 6 \mid 30$

ZADATAK. Da li jednačina $942x + 444y = 34$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$?

Linearna Diofantova jednačina

ZADATAK. Odrediti cele brojeve x i y takve da je

$$942x + 444y = 6.$$

$\mathrm{NZD}(942, 444) = 6$;

$$\begin{aligned} 54 &= 942 + (-2) \cdot 444 \\ 12 &= 444 + (-8) \cdot (942 + (-2) \cdot 444) = (-8) \cdot 942 + 17 \cdot 444 \\ \underline{6} &= 54 + (-4) \cdot 12 = \underline{33 \cdot 942 + (-70) \cdot 444}. \end{aligned}$$

TEOREMA. Linearna Diofantova jednačina $ax + by = c$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$ ako i samo ako $\mathrm{NZD}(a, b) \mid c$.

ZADATAK. Da li jednačina $942x + 444y = 30$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$?

DA: $\mathrm{NZD}(942, 444) = 6 \mid 30$

ZADATAK. Da li jednačina $942x + 444y = 34$ ima rešenja u $\mathbb{Z}$?

NE: $\mathrm{NZD}(942, 444) = 6 \nmid 34$

Diofantove jednačine

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $27x + 59y = 20$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Linearna Diofantova jednačina: $ax + by = c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}$]

Diofantove jednačine

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $27x + 59y = 20$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Linearna Diofantova jednačina: $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$]

ZADATAK 2. Rešiti jednačinu $x^2 - 2y^2 = 1$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pelova jednačina: $x^2 - Dy^2 = 1$]

Diofantove jednačine

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $27x + 59y = 20$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Linearna Diofantova jednačina: $ax + by = c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}$]

ZADATAK 2. Rešiti jednačinu $x^2 - 2y^2 = 1$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pelova jednačina: $x^2 - Dy^2 = 1$]

ZADATAK 3. Rešiti jednačinu $x^2 + y^2 = z^2$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pitagorine trojke]

Diofantove jednačine

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $27x + 59y = 20$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Linearna Diofantova jednačina: $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$]

ZADATAK 2. Rešiti jednačinu $x^2 - 2y^2 = 1$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pelova jednačina: $x^2 - Dy^2 = 1$]

ZADATAK 3. Rešiti jednačinu $x^2 + y^2 = z^2$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pitagorine trojke]

ZADATAK 4.* [Medjunarodna olimpijada, Luksemburg, 1980]
Rešiti jednačinu $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$ u skupu $\mathbb{Z}$.

Diofantove jednačine

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $27x + 59y = 20$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Linearna Diofantova jednačina: $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$]

ZADATAK 2. Rešiti jednačinu $x^2 - 2y^2 = 1$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pelova jednačina: $x^2 - Dy^2 = 1$]

ZADATAK 3. Rešiti jednačinu $x^2 + y^2 = z^2$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pitagorine trojke]

ZADATAK 4.* [Medjunarodna olimpijada, Luksemburg, 1980]
Rešiti jednačinu $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$ u skupu $\mathbb{Z}$.

ZADATAK 5.* [MMO 1994]
Dokazati da jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ ima beskonačno mnogo rešenja u skupu $\mathbb{Z}$.

Diofantove jednačine

ZADATAK 1. Rešiti jednačinu $27x + 59y = 20$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Linearna Diofantova jednačina: $ax + by = c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}$]

ZADATAK 2. Rešiti jednačinu $x^2 - 2y^2 = 1$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pelova jednačina: $x^2 - Dy^2 = 1$]

ZADATAK 3. Rešiti jednačinu $x^2 + y^2 = z^2$ u skupu $\mathbb{Z}$.

[Pitagorine trojke]

ZADATAK 4.* [Medjunarodna olimpijada, Luksemburg, 1980]
Rešiti jednačinu $x^3 + x^2 + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$ u skupu $\mathbb{Z}$.

ZADATAK 5.* [MMO 1994]
Dokazati da jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$ ima beskonačno mnogo rešenja u skupu $\mathbb{Z}$.

ZADATAK 6.* [Balkanska olimpijada, Kipar 1998]
Dokazati da jednačina $y^2 = x^5 - 4$ nema rešenja u skupu $\mathbb{Z}$.

II svetski kongres matematičara – 1900. godina, Pariz

Matematički problemi

⋮

10. *Ispitivanje rešivosti Diofantovih jednačina*

Za datu Diofantovu jednačinu sa bilo kojim brojem nepoznatih i celobrojnim koeficijentima, izmisliti postupak kojim se može odlučiti, koristeći konačan broj operacija, da li ta jednačina ima ili nema rešenja.

⋮

David Hilbert
(1862-1943)

Da li postoji algoritam DIOFANT?

Ako je $f(x_1,\ldots,x_n)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima, da li jednačina $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ ima rešenja u skupu $\mathbb{Z}^n$?

Da li postoji algoritam DIOFANT?

Ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima, da li jednačina $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ima rešenja u skupu $\mathbb{Z}^n$?

ULAZ:	$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$
ALGORITAM:?	DIOFANT
IZLAZ:	DA/NE

Da li postoji algoritam DIOFANT?

Ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima, da li jednačina $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ima rešenja u skupu $\mathbb{Z}^n$?

ULAZ:	$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$
ALGORITAM:?	DIOFANT
IZLAZ:	DA/NE

ULAZ:	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$
ALGORITAM:	DIOFANT
IZLAZ:	DA

Da li postoji algoritam DIOFANT?

Ako je $f(x_1, \ldots, x_n)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima, da li jednačina $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ima rešenja u skupu $\mathbb{Z}^n$?

ULAZ:	$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$
ALGORITAM:?	DIOFANT
IZLAZ:	DA/NE

ULAZ:	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$
ALGORITAM:	DIOFANT
IZLAZ:	DA

ULAZ:	$x_1^5 - x_2^2 - 4 = 0$
ALGORITAM:	DIOFANT
IZLAZ:	NE

Ne sme da nas zavara ‘polualgoritam’!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

Ne sme da nas zavara 'polualgoritam'!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne;

Ne sme da nas zavara ‘polualgoritam’!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne;

Ne sme da nas zavara ‘polualgoritam’!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne; $(0,1,0)$ – ne;

Ne sme da nas zavara ‘polualgoritam’!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne; $(0,1,0)$ – ne; $\ldots(1,1,1)$ – ne;

Ne sme da nas zavara ‘polualgoritam’!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne; $(0,1,0)$ – ne; $\dots (1,1,1)$ – ne;
$(0,0,-1)$ – ne; $\dots (-1,-1,-1)$ – ne;

Ne sme da nas zavara 'polualgoritam'!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne; $(0,1,0)$ – ne; $\ldots(1,1,1)$ – ne;
$(0,0,-1)$ – ne; $\ldots(-1,-1,-1)$ – ne;

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3,1,1)$ – DA

Ne sme da nas zavara 'polualgoritam'!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne; $(0,1,0)$ – ne; $\ldots (1,1,1)$ – ne;
$(0,0,-1)$ – ne; $\ldots (-1,-1,-1)$ – ne;

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3,1,1)$ – DA

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 30$ ima celobrojna rešenja?

Ne sme da nas zavara ‘polualgoritam’!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne; $(0,1,0)$ – ne; $\ldots(1,1,1)$ – ne;
$(0,0,-1)$ – ne; $\ldots(-1,-1,-1)$ – ne;
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3,1,1)$ – DA

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 30$ ima celobrojna rešenja?

DA: 'Najmanje' rešenje: $(-283059965, -2218888517, 2220422932)$

Ne sme da nas zavara ‘polualgoritam’!

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 29$ ima celobrojna rešenja?

$(0,0,0)$ – ne; $(0,0,1)$ – ne; $(0,1,0)$ – ne; $\ldots(1,1,1)$ – ne;
$(0,0,-1)$ – ne; $\ldots(-1,-1,-1)$ – ne;

....$(3,1,1)$ – DA

ZADATAK. Da li jednačina $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 30$ ima celobrojna rešenja?

DA: 'Najmanje' rešenje: $(-283059965, -2218888517, 2220422932)$

ZADATAK. Da li jednačina

$$x_1^{1729} x_2^{1093} x_3^{196884} - 163 x_1 x_2 x_3 x_4^{262537412640768000} = 561$$

ima celobrojna rešenja?

Važna pitanja

- Da li je opravdana sumnja da neki problemi nisu algoritamski rešivi?
- Kako dokazati da neki problem nije algoritamski rešiv?
- Šta je algoritam?

Al Horezmi

- Primeri algoritama su poznati praktično u svim oblastima matematike pri čemu neki potiču još iz antičkog doba.
- Reč *algoritam* dolazi od latinizovanog imena arapskog matematičara

  Abu Džafar Muhamed Ibn Musa **Al Horezmija**

  koji je u IX veku dao veliki doprinos matematici svojim delom

  Hisab **al džabr** *val mukabala*.
- Početkom XII veka jedna Al Horizmijeva knjiga je prevedena na latinski pod naslovom

  Algoritmi de numero indorum
  [prevod: *Al Horezmi o indijskoj veštini računanja*].

  Tada je u Evropu stigao savremeni pozicioni sistem zapisivanja brojeva (indijsko-arapske cifre).

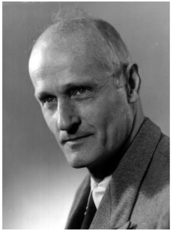
Šta je algoritam?

- Pojam *algoritma* ili *efektivne procedure* vekovima postoji u matematici bez precizne definicije. Neformalno, pod algoritmom se podrazumeva
  mehanički proces, definisan konačnim brojem instrukcija, koji se izvodi korak po korak nad konačnim skupom podataka, pri čemu je svaki korak nedvosmisleno definisan i realizuje se u konačnom vremenu i u ograničenom delu prostora.
- Iako navedena rečenica dosta dobro odgovara svakodnevnoj upotrebi ovog pojma, ona se ne može uzeti za (strogu) matematičku definiciju!
- Navedena 'definicija' nemoćna je pred problemima tipa: **pokazati da ne postoji algoritam za rešavanje nekog problema**.

30-te godine XX veka

Гедел
(1906-1978)

Черч
(1903-1995)



Клини
(1909-1994)

Тјуринг
(1912-1954)

30-te godine XX veka

- Kurt Gedel (1906–1978)

  1931 (Gedel ima 25 godine) Gedelove teoreme nepotpunosti; počinje da se nazire matematički pojam efektivne procedure;

30-te godine XX veka

- Kurt Gedel (1906–1978)

  1931 (Gedel ima 25 godine) Gedelove teoreme nepotpunosti; počinje da se nazire matematički pojam efektivne procedure;

  1934 Gedel uvodi pojam *uopštene rekurzivne funkcije* oslanjajući se na radove Erbrana i Akermana

30-te godine XX veka

- Kurt Gedel (1906–1978)
  - 1931 (Gedel ima 25 godine) Gedelove teoreme nepotpunosti; počinje da se nazire matematički pojam efektivne procedure;
  - 1934 Gedel uvodi pojam *uopštene rekurzivne funkcije* oslanjajući se na radove Erbrana i Akermana
- Alonso Čerč (1903–1995)
  - 1930 Čerč sa svojim studentima, medju kojima je najistaknutiji Klini (1909–1994), proučava λ-račun (Čerč ima 27 g., a Klini 21 g.);

30-te godine XX veka

- Kurt Gedel (1906–1978)

  1931 (Gedel ima 25 godine) Gedelove teoreme nepotpunosti; počinje da se nazire matematički pojam efektivne procedure;

  1934 Gedel uvodi pojam *uopštene rekurzivne funkcije* oslanjajući se na radove Erbrana i Akermana

- Alonso Čerč (1903–1995)

  1930 Čerč sa svojim studentima, medju kojima je najistaknutiji Klini (1909–1994), proučava λ-račun (Čerč ima 27 g., a Klini 21 g.);

  1936 Čerč formuliše čuvenu *Čerčovu tezu* i najavljuje da je Hilbertov Entscheidungsproblem nerešiv.

30-te godine XX veka

- Kurt Gedel (1906–1978)
  - 1931 (Gedel ima 25 godine) Gedelove teoreme nepotpunosti; počinje da se nazire matematički pojam efektivne procedure;
  - 1934 Gedel uvodi pojam *uopštene rekurzivne funkcije* oslanjajući se na radove Erbrana i Akermana
- Alonso Čerč (1903–1995)
  - 1930 Čerč sa svojim studentima, medju kojima je najistaknutiji Klini (1909–1994), proučava λ-račun (Čerč ima 27 g., a Klini 21 g.);
  - 1936 Čerč formuliše čuvenu *Čerčovu tezu* i najavljuje da je Hilbertov Entscheidungsproblem nerešiv.
- Alan Tjuring (1912–1954)
  - 1936 Tjuring kao student (22. godine, 1935. godine) razmatra Entscheidungsproblem i svoje rešenje prikazuje svom profesoru ...

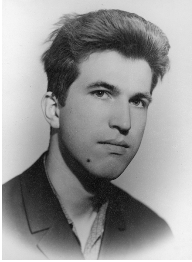
30-te godine XX veka

- Kurt Gedel (1906–1978)
  - 1931 (Gedel ima 25 godine) Gedelove teoreme nepotpunosti; počinje da se nazire matematički pojam efektivne procedure;
  - 1934 Gedel uvodi pojam *uopštene rekurzivne funkcije* oslanjajući se na radove Erbrana i Akermana
- Alonso Čerč (1903–1995)
  - 1930 Čerč sa svojim studentima, medju kojima je najistaknutiji Klini (1909–1994), proučava λ-račun (Čerč ima 27 g., a Klini 21 g.);
  - 1936 Čerč formuliše čuvenu *Čerčovu tezu* i najavljuje da je Hilbertov Entscheidungsproblem nerešiv.
- Alan Tjuring (1912–1954)
  - 1936 Tjuring kao student (22. godine, 1935. godine) razmatra Entscheidungsproblem i svoje rešenje prikazuje svom profesoru ... Ubrzo, Tjuringov rad priznaju Gedel, Čerč, Klini, a Tjuringov pristup smatraju genijalnim.

30-te godine XX veka

- Kurt Gedel (1906–1978)
  - 1931 (Gedel ima 25 godine) Gedelove teoreme nepotpunosti; počinje da se nazire matematički pojam efektivne procedure;
  - 1934 Gedel uvodi pojam *uopštene rekurzivne funkcije* oslanjajući se na radove Erbrana i Akermana
- Alonso Čerč (1903–1995)
  - 1930 Čerč sa svojim studentima, medju kojima je najistaknutiji Klini (1909–1994), proučava λ-račun (Čerč ima 27 g., a Klini 21 g.);
  - 1936 Čerč formuliše čuvenu *Čerčovu tezu* i najavljuje da je Hilbertov Entscheidungsproblem nerešiv.
- Alan Tjuring (1912–1954)
  - 1936 Tjuring kao student (22. godine, 1935. godine) razmatra Entscheidungsproblem i svoje rešenje prikazuje svom profesoru ... Ubrzo, Tjuringov rad priznaju Gedel, Čerč, Klini, a Tjuringov pristup smatraju genijalnim.
- Emil Post (1897–1954)
  - 1936 Definiše 'konačne kombinatorne procese' koji dosta podsećaju na Tjuringove mašine.

Još jedna teorema ‘nemogućnosti’



Juri Matijasevič
(1947–)

Matijasevičeva teorema, 1970. godina

Ne postoji postupak o kojem Hilbert govori u svom X problemu.

Lavina neodlučivih problema u matematici

R. Penrouz, *Carev novi um – O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

PRIMER. Reči zapisane engleskom abecedom možemo transforimsati pomoću sledećih

pravila:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AH} &\equiv \mathrm{HA}\\
\mathrm{OH} &\equiv \mathrm{HO}\\
\mathrm{AT} &\equiv \mathrm{TA}\\
\mathrm{OT} &\equiv \mathrm{TO}\\
\mathrm{TAI} &\equiv \mathrm{IT}\\
\mathrm{HOI} &\equiv \mathrm{IH}\\
\mathrm{THAT} &\equiv \mathrm{ITHE}
\end{aligned}
$$

Lavina neodlučivih problema u matematici

R. Penrouz, *Carev novi um – O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

PRIMER. Reči zapisane engleskom abecedom možemo transforimsati pomoću sledećih

pravila:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AH} &\equiv \mathrm{HA}\\
\mathrm{OH} &\equiv \mathrm{HO}\\
\mathrm{AT} &\equiv \mathrm{TA}\\
\mathrm{OT} &\equiv \mathrm{TO}\\
\mathrm{TAI} &\equiv \mathrm{IT}\\
\mathrm{HOI} &\equiv \mathrm{IH}\\
\mathrm{THAT} &\equiv \mathrm{ITHE}
\end{aligned}
$$

Primer izvodjenja:

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathrm{AH}}\mathrm{THOI} &\equiv \overline{\mathrm{H}\underline{\mathrm{A}}}\underline{\mathrm{T}}\mathrm{HOI}\\
&\equiv \mathrm{H}\overline{\mathrm{TA}}\underline{\mathrm{HOI}}\\
&\equiv \mathrm{H}\underline{\mathrm{TA}\overline{\mathrm{I}}}\overline{\mathrm{H}}\\
&\equiv \mathrm{H}\overline{\mathrm{IT}}\mathrm{H}
\end{aligned}
$$

Lavina neodlučivih problema u matematici

R. Penrouz, *Carev novi um – O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

PRIMER. Reči zapisane engleskom abecedom možemo transforimsati pomoću sledećih

pravila:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AH} & \equiv & \mathrm{HA} \\ \mathrm{OH} & \equiv & \mathrm{HO} \\ \mathrm{AT} & \equiv & \mathrm{TA} \\ \mathrm{OT} & \equiv & \mathrm{TO} \\ \mathrm{TAI} & \equiv & \mathrm{IT} \\ \mathrm{HOI} & \equiv & \mathrm{IH} \\ \mathrm{THAT} & \equiv & \mathrm{ITHE} \end{array}$$

Zadatak.

Da li je TOHAT≡OATHT?

Lavina neodlučivih problema u matematici

R. Penrouz, *Carev novi um – O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

PRIMER. Reči zapisane engleskom abecedom možemo transforimsati pomoću sledećih

pravila:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AH} & \equiv & \mathrm{HA} \\ \mathrm{OH} & \equiv & \mathrm{HO} \\ \mathrm{AT} & \equiv & \mathrm{TA} \\ \mathrm{OT} & \equiv & \mathrm{TO} \\ \mathrm{TAI} & \equiv & \mathrm{IT} \\ \mathrm{HOI} & \equiv & \mathrm{IH} \\ \mathrm{THAT} & \equiv & \mathrm{ITHE} \end{array}$$

Zadatak.
Da li je TOHAT≡OATHT?

DA: TOHAT≡TOAHT≡OTAHT≡OATHT.

Lavina neodlučivih problema u matematici

R. Penrouz, *Carev novi um – O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

PRIMER. Reči zapisane engleskom abecedom možemo transforimsati pomoću sledećih

pravila:

AH	$\equiv$	HA
OH	$\equiv$	HO
AT	$\equiv$	TA
OT	$\equiv$	TO
TAI	$\equiv$	IT
HOI	$\equiv$	IH
THAT	$\equiv$	ITHE

Zadatak.
Da li je TOHAT$\equiv$OATHT?

DA: TOHAT$\equiv$TOAHT$\equiv$OTAHT$\equiv$OATHT.

Zadatak.
Da li je TOHAT$\equiv$OAHTH?

Lavina neodlučivih problema u matematici

R. Penrouz, *Carev novi um – O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

PRIMER. Reči zapisane engleskom abecedom možemo transforimsati pomoću sledećih

pravila:

AH	$\equiv$	HA
OH	$\equiv$	HO
AT	$\equiv$	TA
OT	$\equiv$	TO
TAI	$\equiv$	IT
HOI	$\equiv$	IH
THAT	$\equiv$	ITHE

Zadatak.

Da li je TOHAT$\equiv$OATHT?

DA: TOHAT$\equiv$TOAHT$\equiv$OTAHT$\equiv$OATHT.

Zadatak.

Da li je TOHAT$\equiv$OAHTH?

NE: ???

Lavina neodlučivih problema u matematici

R. Penrouz, *Carev novi um – O računarima, umu i zakonima fizike*, Informatika, Beograd, 2004.

PRIMER. Reči zapisane engleskom abecedom možemo transforimsati pomoću sledećih

pravila:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AH} &\equiv \mathrm{HA}\\
\mathrm{OH} &\equiv \mathrm{HO}\\
\mathrm{AT} &\equiv \mathrm{TA}\\
\mathrm{OT} &\equiv \mathrm{TO}\\
\mathrm{TAI} &\equiv \mathrm{IT}\\
\mathrm{HOI} &\equiv \mathrm{IH}\\
\mathrm{THAT} &\equiv \mathrm{ITHE}
\end{aligned}
$$

'Zadatak.'

Napisati program koji za dve zadate reči engleske abecede ispituje da li su one ekvivalentne ili nisu (za skup pravila naveden sa desne strane).

Jedan rešiv problem reči

NAPOMENA. Dodajmo skupu reči i *praznu reč* koja ne sadrži ni jedno slovo – označimo je $*$; i dozvolimo pravila oblika $w \equiv *$ koja znače da se iz svake reči može izbaci w, kao i da se w može upisati izmedju bilo koja dva slova reči koju transformišemo, ili ispred nje ili iza nje.

Jedan rešiv problem reči

NAPOMENA. Dodajmo skupu reči i *praznu reč* koja ne sadrži ni jedno slovo – označimo je $*$; i dozvolimo pravila oblika $w \equiv *$ koja znače da se iz svake reči može izbaci w, kao i da se w može upisati izmedju bilo koja dva slova reči koju transformišemo, ili ispred nje ili iza nje.

Pravila:

$$\begin{aligned} SS &\equiv * \\ RRR &\equiv * \\ RS &\equiv SRR \end{aligned}$$

Jedan rešiv problem reči

NAPOMENA. Dodajmo skupu reči i *praznu reč* koja ne sadrži ni jedno slovo – označimo je $*$; i dozvolimo pravila oblika $w \equiv *$ koja znače da se iz svake reči može izbaci w, kao i da se w može upisati izmedju bilo koja dva slova reči koju transformišemo, ili ispred nje ili iza nje.

Pravila:

$$\begin{aligned} SS &\equiv * \\ RRR &\equiv * \\ RS &\equiv SRR \end{aligned}$$

Zadatak.

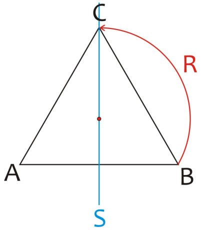
Napisati program koji za dve na ulazu zadate reči zapisane slovima S i R ispituje da li su one ekvivalentne ili nisu (za skup pravila naveden sa desne strane).

Jedan rešiv problem reči

Napomena. Dodajmo skupu reči i *praznu reč* koja ne sadrži ni jedno slovo – označimo je $*$; i dozvolimo pravila oblika $w \equiv *$ koja znače da se iz svake reči može izbaci w, kao i da se w može upisati izmedju bilo koja dva slova reči koju transformišemo, ili ispred nje ili iza nje.

Pravila:

$$\begin{aligned} SS &\equiv * \\ RRR &\equiv * \\ RS &\equiv SRR \end{aligned}$$



Problem reči ima veliko teorijsko i praktično značenje!

Pravila:

$$\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & \equiv & (x-y)(x+y) \\ (x+y)^2 & \equiv & x^2 + 2xy + y^2 \\ x^3 - y^3 & \equiv & (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ & \vdots & \end{array}$$

Problem reči ima veliko teorijsko i praktično značenje!

Pravila:

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 &\equiv (x-y)(x+y) \\
(x+y)^2 &\equiv x^2 + 2xy + y^2 \\
x^3 - y^3 &\equiv (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Zadatak.

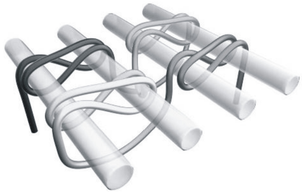
Dokazati identitet:

$$(x-y)(x+y) + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2$$

Problem reči ima veliko teorijsko i praktično značenje!

Zadatak.

Kanap je prebačen preko četiri oslonca i uravnotežen tegovima na krajevima. Dokazati da će se izvlačenjem bilo kog oslonca kanap raspetljati i pasti na zemlju.

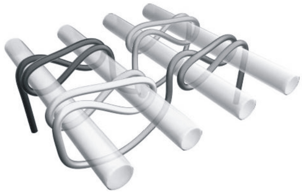


Problem reči ima veliko teorijsko i praktično značenje!

Reč koja opisuje sliku desno:
$aBAbcDCdBabADcdC$

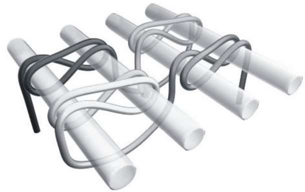
Pravila:

$Aa \equiv *$; $aA \equiv *$;
$Bb \equiv *$; $bB \equiv *$;
$Cc \equiv *$; $cC \equiv *$;
$Dd \equiv *$; $dD \equiv *$.



Problem reči ima veliko teorijsko i praktično značenje!

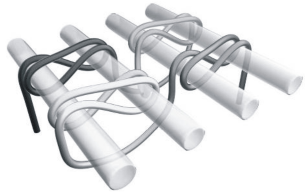
Reč koja opisuje sliku desno:
aBAbcDCdBabADcdC
Pravila:
$Aa \equiv *$; $aA \equiv *$;
$Bb \equiv *$; $bB \equiv *$;
$Cc \equiv *$; $cC \equiv *$;
$Dd \equiv *$; $dD \equiv *$.



Ako izbacimo prvi oslonac (izbrišemo slova A i a), onda:

Problem reči ima veliko teorijsko i praktično značenje!

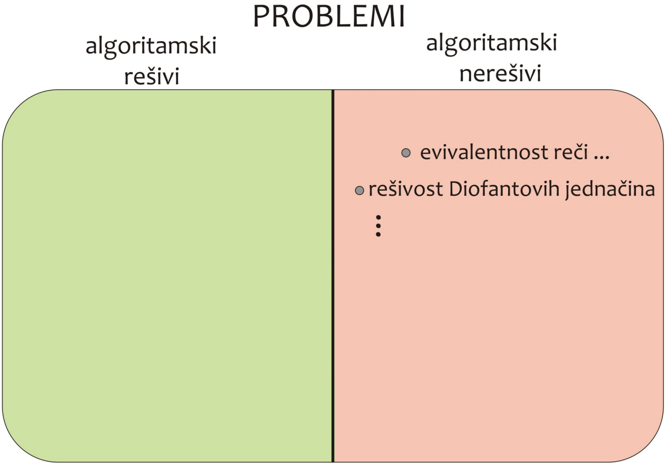
Reč koja opisuje sliku desno:
aBAbcDCdBabADcdC
Pravila:
$Aa \equiv *;\ aA \equiv *;$
$Bb \equiv *;\ bB \equiv *;$
$Cc \equiv *;\ cC \equiv *;$
$Dd \equiv *;\ dD \equiv *.$



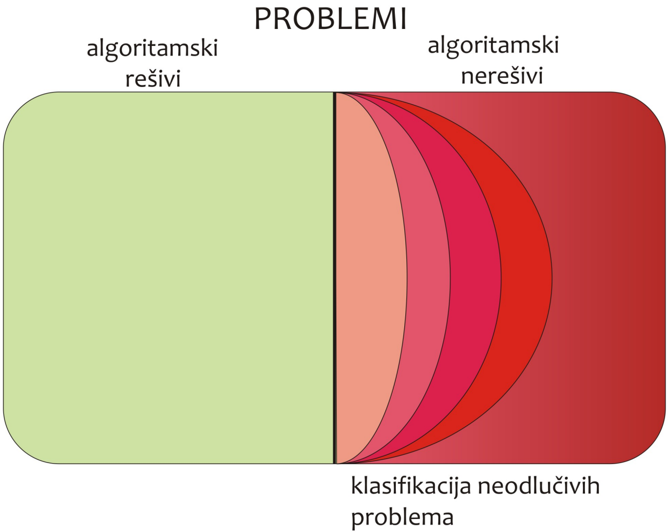
Ako izbacimo prvi oslonac (izbrišemo slova A i a), onda:

$$\begin{aligned}
\underline{Bb}cDCdBbDcdC &\equiv cDCd\underline{Bb}DcdC \\
&\equiv cDC\underline{dD}cdC \\
&\equiv cD\underline{Cc}dC \\
&\equiv c\underline{Dd}C \\
&\equiv \underline{cC} \\
&\equiv *
\end{aligned}$$

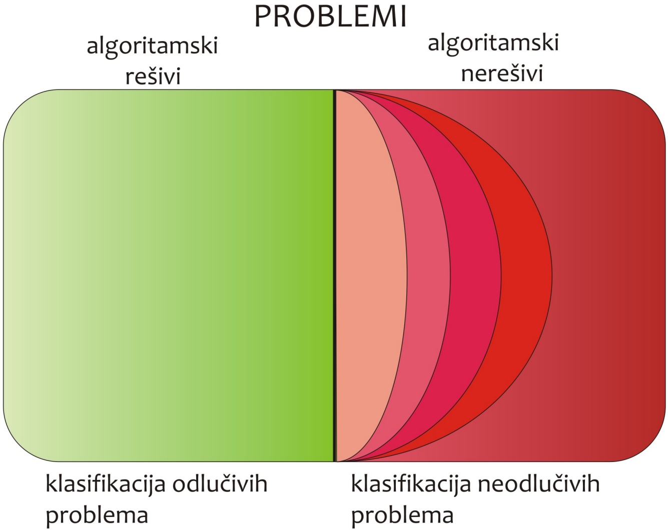
Granica algoritamske rešivosti



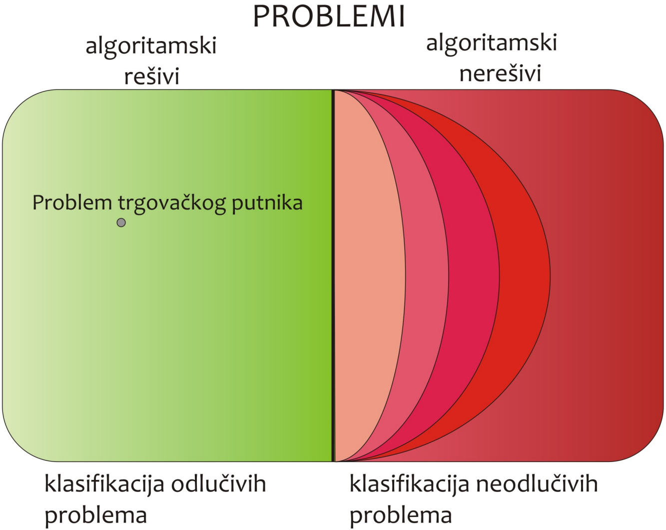
Granica algoritamske rešivosti



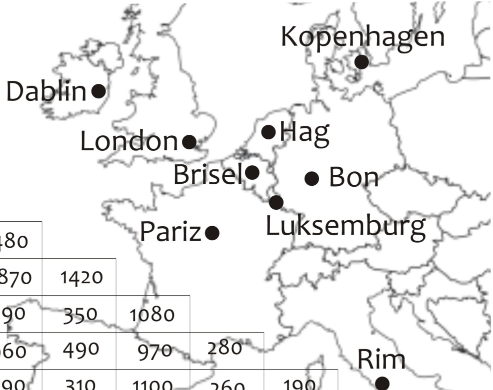
Granica algoritamske rešivosti



Granica algoritamske rešivosti



Problem trgovačkog putnika



Dablin	1250							
London	950	480						
Rim	1510	1870	1420					
Pariz	1020	790	350	1080				
Luks.	800	960	490	970	280			
Brisel	760	790	310	1100	260	190		
Hag	590	690	290	1210	380	280	240	
Bon	660	980	520	1040	400	140	190	240
	Kopen.	Dablin	London	Rim	Pariz	Luks.	Brisel	Hag

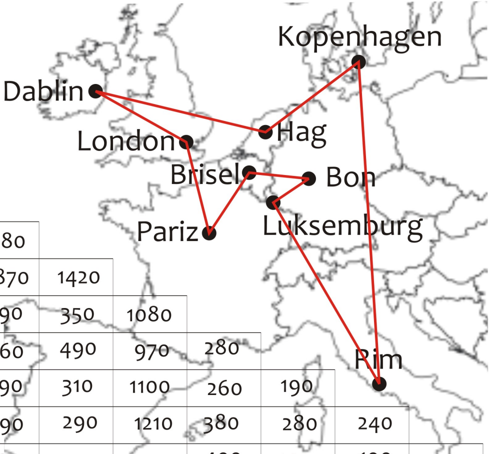
Algoritam TP – potraga za optimalnim putem

Ukupno ima $\frac{(9-1)!}{2} = 20160$ mogućih puteva. Najkraći je:

Algoritam TP – potraga za optimalnim putem

Ukupno ima $\frac{(9-1)!}{2} = 20160$ mogućih puteva. Najkraći je:

5 180 km



Dablin	1250							
London	950	480						
Rim	1510	1870	1420					
Pariz	1020	790	350	1080				
Luks.	800	960	490	970	280			
Brisel	760	790	310	1100	260	190		
Hag	590	690	290	1210	380	280	240	
Bon	660	980	520	1040	400	140	190	240
	Kopen.	Dablin	London	Rim	Pariz	Luks.	Brisel	Hag

Eksplozija vremena!

Broj puteva izmedju 28 glavnih gradova članica EU:

$$5\,444\,434\,725\,209\,176\,080\,384\,000\,000$$

Eksplozija vremena!

Broj puteva izmedju 28 glavnih gradova članica EU:

$$5\,444\,434\,725\,209\,176\,080\,384\,000\,000$$

Ali,

$$5\,444\,434\,725\,209\,176\,080\,384\,000\,000\,\mathrm{ms} > 172\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{god.}$$

Potraga za optimalnim putem iz Bona

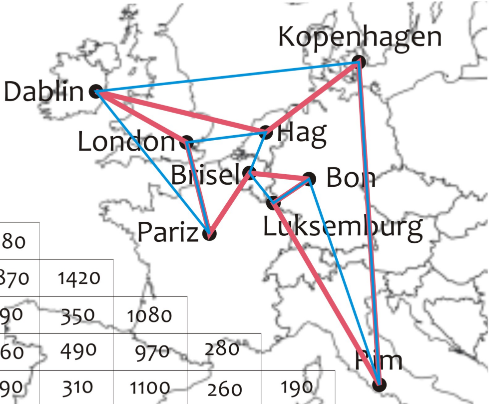
Strategija 1: Iz svakog grada putuje se u onaj koji mu je najbliži.

Potraga za optimalnim putem iz Bona

Strategija 1: Iz svakog grada putuje se u onaj koji mu je najbliži.

5 180 km

5 800 km



Dablin	1250							
London	950	480						
Rim	1510	1870	1420					
Pariz	1020	790	350	1080				
Luks.	800	960	490	970	280			
Brisel	760	790	310	1100	260	190		
Hag	590	690	290	1210	380	280	240	
Bon	660	980	520	1040	400	140	190	240
	Kopen.	Dablin	London	Rim	Pariz	Luks.	Brisel	Hag

Potraga za optimalnim putem iz Bona

Strategija 2:

- potraži najudaljenije mesto – Rim;

Potraga za optimalnim putem iz Bona

Strategija 2:

- potraži najudaljenije mesto – Rim;
- potraži mesto X tako da je $\min\{|X\text{Bon}|, |X\text{Rim}|\}$ maksimalno – Dablin; nadji putanju čija se dužina najmanje povećava u odnosu na prethodnu;

Potraga za optimalnim putem iz Bona

Strategija 2:

- potraži najudaljenije mesto – Rim;
- potraži mesto X tako da je $\min\{|X\mathrm{Bon}|, |X\mathrm{Rim}|\}$ maksimalno – Dablin; nadji putanju čija se dužina najmanje povećava u odnosu na prethodnu;
- potraži mesto X tako da je $\min\{|X\mathrm{Bon}|, |X\mathrm{Rim}|, |X\mathrm{Dablin}|\}$ maksimalno – Kopenhagen; nadji putanju čija se dužina najmanje povećava u odnosu na prethodnu (Bon-Dablin-Kopenhagen-Rim);
- $\vdots$

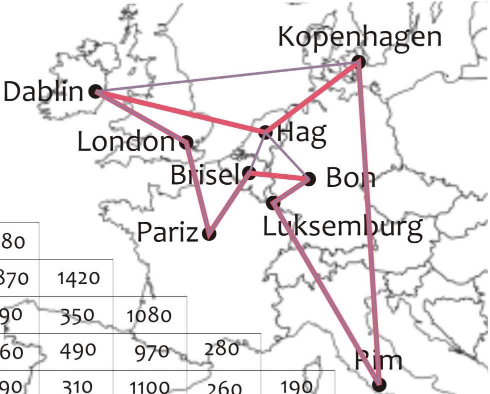
Potraga za optimalnim putem iz Bona

Strategija 2:

5 180 km

5 800 km

5 370 km



Dablin	1250							
London	950	480						
Rim	1510	1870	1420					
Pariz	1020	790	350	1080				
Luks.	800	960	490	970	280			
Brisel	760	790	310	1100	260	190		
Hag	590	690	290	1210	380	280	240	
Bon	660	980	520	1040	400	140	190	240
	Kopen.	Dablin	London	Rim	Pariz	Luks.	Brisel	Hag

Problemi za 21. vek

Broj gradova	Algoritam TP	Strategija 1	Strategija 2
n	$O((n-1)!)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$
28	$> 5 \cdot 10^{27}$	784	21952

Problemi za 21. vek

Broj gradova	Algoritam TP	Strategija 1	Strategija 2
n	$O((n-1)!)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$
28	$> 5 \cdot 10^{27}$	784	21952

$$P \stackrel{?}{=} NP$$