Према књизи:
T. Tao, Solving Mathematical Problems – A Personal Perspective

Путовање од хиљаду миља почиње једним кораком.
Лао Це

Попут горе наведене пословице, решење проблема почиње (наставља се и завршава) једноставним, логичким корацима. Постоји неколико општих стратегија и смерница за правилно решавање проблема. Класична литература за многе од тих стратегија је:

George Polya, HOW TO SOLVE IT, A new aspect of mathematical method, Princeton University Press, 1945
George Polya, KAKO ĆU RIJEŠITI MATEMATIČKI ZADATAK, Školska knjiga, Zagreb, 1966

Продискутујмо неке од стратегија, заједно са кратким илустрацијама како свака стратегија може да се примени на следећи проблем:

Проблем 1.1. Странице троуглова чине аритметичку прогресију, са разликом d. Површина троугла је t. Наћи дужине страница и углове троугла.

Разумети проблем.
Којег типа је проблем? Постоје три главна типа проблема:

1. "Показати да ..." или "Израчунати ..." питања, у којима одређено тврђење треба да се докаже, или одређени исказ разради;
2. "Наћи један ..." или "Наћи све ..." питања, која захтевају да се нађе нешто (или све) што задовољава извесне услове;
3. "Да ли постоји ..." питања, која или захтевају да се покаже тврђење или да се пружи контрапример (што је један од претходна два типа проблема).

Врста проблема је важна јер она одређује основни метод за приступ решавању. "Показати да ..." или "Израчунати ..." задаци почињу задатим подацима и циљ је да се покаже неко тврђење или да се нађе вредност неког израза; овај тип проблема је генерално лакши од преостала два јер постоји јасан циљ, којем се са намером може прићи. "Наћи ..." је тип пробај-и-промаши задатка; генерално треба погодити одговор који је приближно исти правом решењу, а онда га мало модификовати да би био што тачнији; или се могу алтернативно изменити услови које израз треба да задовољава, али лакши од оних задатих. Проблеми "Да ли постоји ..." су углавном најтежи, јер прво треба одредити да ли постоји, или не, објекат са наведеним условима, а онда спровести одговарајући доказ, или наћи контрапример. Наравно, не могу се сва питања и сви проблеми једноставно и недвосмислено сврстати у ове категорије.

Проблем 1.1 је типа "Израчунати ...". Треба наћи неколико непознатих, користећи друге дате променљиве. Ово више указује на алгебарско решење него на геометријско, са више једначина које повезују d, t са страницама и угловима датог троугла и чијим би се решавањем евентуално дошло до непознатих.

Разумети податке.
Шта је дато у задатку? Обично се говори о објектима који задовољавају неке услове. Да би се разумели подаци, треба видети како су повезани дати и тражени подаци, тј. објекти. Ова

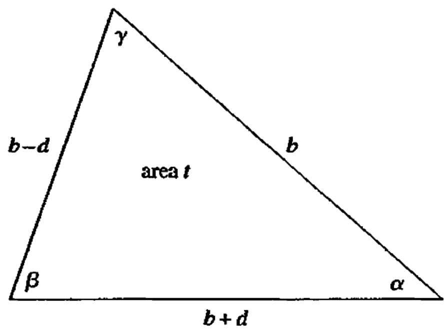
запажања могу да укажу на одговарајућу технику решавања. На пример, у проблему 1.1, дати подаци површина троугла t и чињеница да странице чине аритметичку прогресију са разликом d. Будући да се траже странице и углови троугла, за решавање проблема би могле бити од користи теореме које се односе на странице, углове и површину троугла: синусна и косинусна теорема, формуле за површину, итд. Такође, услов да странице образују аритметичку прогресију оправдава посебан начин обележавања страница; нпр. странице $a, a+ d, a+2d$.

Разумети циљ.
Шта желимо? Можда ће бити потребно да се нађе објекат, докаже тврђење, покаже егзистенција објекта са посебним условима, итд. Као и код претходног дела стратегије, "разумети податке", познавање циља помаже да се фокусирамо на најбоље технике за рад. Познавање циља такође помаже да се постави неки „стратешки циљ“ за које знамо да ће нас приближити решењу. Циљ Проблема 1.1 јесте „наћи странице и углове троугла“. Ово значи, као што је и раније споменуто, да ћемо користити теореме и формуле везане за те елементе. Стратешки циљ би могао бити „тражити једначине које садрже странице и углове троугла.“

Изабрати погодне ознаке.
Сада када имамо податке и циљ, морамо да их представимо на ефикасан начин, тако да буду описани што је једноставније могуће. Ово се природно надовезује на идеје из претходне две стратегије. У проблему који посматрамо, већ се намећу једначине са d, t, страницама и угловима троугла. Требало би да изразимо елементе троугла као промењиве: можемо изабрати да странице означимо са a, b, c, док ћемо углове означавати са α, β, γ. Ако искористимо податак да странице троугла чине аритметичку прогресију, уместо a, b, c природније је странице означити са a, $a+d$, $a+2d$. Ознаке би биле још погодније ако странице „симетричније“ представимо са $b-d, b, b+d$, при чему треба имати на уму услов $b>d$. Углове бисмо могли да означимо са α, β, $180° - \alpha - \beta$, али се чини погодније да задржимо првобитан облик углова, имајући на уму да важи $\alpha+\ \beta+\ \gamma = 180°$.
Све претходне идеје треба записати са изабраним ознакама и по потреби нацртати погодан шематски приказ.
Ево неких једнакости и неједнакости, које би се могле искористити за решавање Проблема 1.1:

- (ограниченост) $\alpha, \beta, \gamma, t > 0$ и $b > d$, такође може се да претпоставити, без умањења општости, да је $d \geq 0$;
- (збир углова у троуглу) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
- (синусна теорема) $\frac{b-d}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b+d}{\sin\gamma}$
- (косинусна теорема) $b^2 = (b-d)^2 + (b+d)^2 - 2(b-d)(b+d)\cos\beta$; слично за $b-d$ и $b+d$.
- (формуле за површину троугла) $P = \frac{1}{2}(b-d)b\sin\gamma = \frac{1}{2}(b-d)(b+d)\sin\beta = \frac{1}{2}b(b+d)\sin\alpha$
- (Херонова формула) $t^2 = s(s-b+d)(s-b)(s-b-d)$, где је $s = \frac{(b-d)+b+(b+d)}{2}$ полуобим,
- (неједнакост троугла) $b+d \leq b+(b-d)$.

Многе ове чињенице могу да буду бескорисне или да ометају тражење правог решења. Зато би ваљало проценити које везе би могле бити корисне. У нашем примеру, једнакости изгледају корисније од неједнакости, јер се очекује да циљ буде изражен у облику једнакости. Такође, Херонова формула изгледа обећавајуће, јер се полуобим може поједноставити $s = \frac{3b}{2}$. Такође можемо да нацртамо слику. Често је пожељна код геометријских проблема, мада у овом случају изгледа да цртеж не помаже:



Модификовати мало проблем.

Постоји много начина како да се проблем сведе на неки други, који ће можда бити лакши за решавање:

a) Разматрати специјалне случајеве проблема, као нпр. екстремне или дегенерисане случајеве.
b) Решити неки поједностављену верзију проблема.
c) Формулисати хипотезу из које би произашло решење проблема, и потражити доказ хипотезе.
d) Извести неку последицу проблема, и потражити доказ те последице.
e) Преформулисати проблем (нпр. применити контрапозицију, доказати свођењем на противречност, или увести неку замену).
f) Размотрити решења сличних проблема.
g) Уопштити проблем.

Модификација проблема је корисна када се не види како започети решавање проблема. Решавање сличног проблема понекад открива пут до решење главног задатка. Слично, узимајући у обзир екстремне случајеве и решавајући проблем са додатним претпоставкама такође може да расветли опште решење. Ипак треба знати да су специјални случајеви, по својој природи, специјални, и постоји могућност да се на њих може применити нека елегантна техника није од значаја за решавање општег случаја. Ово се често дешава кад је специјалан случај сувише посебан. Зато треба почети са једноставнијим претпоставкама које не удаљавају сувише од изворног проблема.
За Проблем 1.1 могли бисмо размотрити специјалан случај као нпр. $d = 0$. У овом случају, проблем се знатно поједностављује; једноставно је наћи страницу једнакостраничног троугла површине t: $b = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt[4]{3}}$. Ово указује да и опште решење треба да укључује квадратне корене или корене четвртог степена, али са друге стране не сугерише како да се приђе општем проблему.

Модификовати проблем значајно.
Применом ове „агресивне“ стратегије, значајније мењамо полазни проблем тако што уклањамо сувишне податке, анализирамо и рашчлањујемо циљ, уводимо супротну претпоставку (и покушавамо да је оповргнемо). У суштини, покушавамо да пронађемо кључне компоненте података, шта представља главну тешкоћу у решавању проблема, која тврђења су контрадикторна са датим подацима. Овакви покушају доста помажу да се стекне инстиктивни осећај које технике ће помоћи у решавању неког проблема, а које неће.

У вези са нашим конкретним питањем, главни циљ је наћи странице троугла, јер ће тада применом синусне и косинусне теореме бити одређени и улови. Заправо, да бисмо завршили задатак, треба наћи само b, у зависности од t и d, јер знамо да су све странице једнаке b - d, b, $b + d$.

Решење: Већ је истакнуто да би Херонова формула могла бити корисна за одређивање странице b:

$$t^2 = \frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - b + d\right)\left(\frac{3b}{2} - b\right)\left(\frac{3b}{2} - b - d\right) = \frac{3b^2(b^2 - 4d^2)}{16}$$

Добијена једнакост може се записати у следећем облику:

$$3b^4 - 12d^2b^2 - 16t^2 = 0.$$

Остаје да се ова једначина реши по b.

$$b^2 = \frac{12d^2 \pm \sqrt{144d^4 + 192t^4}}{6} = 2d^2 \pm \sqrt{4d^2 + \frac{16}{3}t^2}.$$

Пошто b, и наравно b^2, морају бити позитивни, добијамо

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^2 + \frac{16}{3}t^2}}.$$

Проблем 2.4. (Taylor 1989) Наћи сва решења једначине $2^n + 7 = x^2$, при чему су n и x цели бројеви.

Оваква врста једначине често захтева доста покушаја и погрешака, пре негп што се пронађе прави пут до решења.

Уопштено, за решавање Диофтантових једначина најједоставнији методе заснивају се на модуларној аритметици и факторизацији. Модуларна аритметика целу једначину анализира у у погодном модулу, који је некад константан (нпр. $\mathrm{mod}\,7$, $\mathrm{mod}\,16$, или некад је то промењљива ($\mathrm{mod}\,pq$)). Факторизацијом настојимо да једначину трансформишемо у облик

$$\text{фактор} \cdot \text{фактор} = \text{"нешто лепо"},$$

где десна страна може бити константа (што је лакши случај), прост број, квадрат или нешто што има ограничен број фактора.

Најбоље је прво испробати елементарне технике. (Уколико би неко одбацио ове елементране методе и одмах почео да анализира „приближну једначину

$$x = \sqrt{2^n + 7} \approx 2^{n/2}$$

Запао би у озбиљнију теорију бројева која садржи верижне разломке, Пелову једначину, рекурентне везе итд. Проблем би се могао решавати и на овај начин, али ћемо предложити једно „елегантније“ решење.)

Добијање корисне факторизације је скоро немогуће, осим када је n паран. Тада се добија разлика квадрата (факторизација од пресудног значаја у Диофтантовим једначинама)

$7 = x^2 - 2^n = (x - 2^m)(x + 2^m)$, при чему је $m = \frac{n}{2}$.

Можемо приметити да су $x - 2^m$ и $x + 2^m$ фактори броја 7, тако да могу бити једнаки само неким од бројева $-7, -1, 1, 7$; даље разматрање могућих случајева нас доводи до закључка да нема решења (под претпоставком да је n паран). Међутим, у општем случају факторизација нас не доводи до решења, нити до тога колико их има. (Иако знамо да n мора бити непаран број.)

Примена модуларне аритметике следећи приступ: увођењем погодног модула настојимо да поједноставимо једну или обе стране једначине.
Уколико бисмо изабрао $\mathrm{mod}\ 7$, дата једначина би се свела на

$$2^n = x^2 (\mathrm{mod}\ 7),$$

што није неко значајно поједноствљење.
Покушајмо да елеминишемо 2^n посматрањем једначине по $\mathrm{mod}\ 2$:

- $0 + 7 = x^2 (\mathrm{mod}\ 2)$, када је $n > 0$,
- $1 + 7 = x^2 (\mathrm{mod}\ 2)$, када је $n = 0$

На овај начин је у великој мери елеминсиано n, али то није довољно јер x^2 на десној страни може бити 0 или 1, тако да нисмо искључили ниједну могућност.
Треба увести неки модул да бисмо смањили број могућих вредности израза x^2. Ваља покушати са $\mathrm{mod}\ 4$, уместо $\mathrm{mod}\ 2$. Тада имамо

1) $0 + 3 = x^2 (\mathrm{mod}\ 4)$, када је $n > 1$,
2) $2 + 3 = x^2 (\mathrm{mod}\ 4)$, када је $n = 1$,
3) $1 + 3 = x^2 (\mathrm{mod}\ 4)$, када је $n = 0$.

Како x^2 може бити 0 $(\mathrm{mod}\ 4)$ или 1 $(\mathrm{mod}\ 4)$, могућност 1) одбацујемо. Дакле, n може бити само 0 или 1. Једноставном провером добијамо: $n = 1$ и x је -3 или 3.

При решавању Диофтантових једначина са циљем да се нађу сва решења, главна идеја је да се потрага решења сведе на коначан број могућности. Видимо да је ово и један од разлога зашто $(\mathrm{mod}\ 7)$ не пролазе у овом случају

Задаци
George Polya, HOW TO SOLVE IT, A new aspect of mathematical method, Princeton University Press, 1945

1. У дати троугао уписати квадрат тако да два његова темена буду на једној страници троугла, а друга два темена на преосталим двема страницама троугла.
2. Посуда има облик праве кружне купе, полупречника основе a и висине b. Врх посуде је окренут доле, а основа је хоризонтална. У тако постављену посуду се улива вода брзином r. Одредите брзину којом се повећава ниво воде у тренутку када је ниво воде y. Колика је тражена брзина ако је $a = 4$ dm, $b = 3$ dm, $r = 2$ dm^3/min, $y = 1$ dm?
3. Одредите тежиште хомогеног тетраедра.
4. Збир било која два угла триедра већи је од трећег угла.
5. Конструишите пресек дате праве и параболе којој су задати жижа и директриса.
6. Докажите да се око сваког тетраедра може описати лопта.
7. Дата је права и правилан октаедар. Одредити раван која садржи дату праву и полови запремину датог октаедра.
8. Наиђемо ли којим случајем на суму $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ можемо приметити да се она може написати у необичном облику $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$. Догађа ли се често да је збир узастопних кубова $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ квадрат природног броја?
9. Одредите запремину зарубљене пирамиде чије су основе квадрати странице a и b, а висина v.
10. Међу свим четвороугловима датог обима, одредите онај који има највећу површину.
11. Одредите површину омотача зарубљене купе чије су основе кругови полупречника R и r, а висина v.
12. Реши једначину $8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$.

13. Конструишите троугао ако је задат један угао, висина из темена датог угла и обим троугла.

14. Израчунајте ширину и висину праве правилне четворостране призме ако је њена запремина $63\ \mathrm{cm}^3$, а површина $102\ \mathrm{cm}^2$.

15. Доказати да пет насумице изабраних равни у простору дели простор на највише 26 делова.

16. Како ћемо из реке извадити тачно $6\ \ell$ воде ако имамо две посуде: једну $4\ \ell$ и једну од $9\ \ell$.

17. Конструишите троугао ако је задата једна страница, висина нормална на ту страницу и угао наспрам дате странице.

18. Може ли се написати неколико бројева тако да се у њима свака од десет цифара појављује тачно једном, а збир тих бројева је једнак 100?

19. У троуглу нека је r полупречник уписане кружнице, R полупречник описане кружнице, а H највећа висина, докажите да је

$$r + R \leq H.$$

20. Дате су брзине два брода и њихов положај у неком одређеном тренутку. Оба брода плове праволинијски константном брзином. Колика је удаљеност тих бродова када су један другом најближи?

21. Конструишите трапез ако су дате све четири његове странице.