4. УМЕТНОСТ РЕШАВАЊА ПРОБЛЕМА

Структура и садржај рада:

1. Изабрати најмање пет (нетривијалних) проблема
2. Детаљно описати и процес решавања (анализа) и решење проблема (синтеза)
3. Сваки задатак преформулисати у већи број једноставнијих захтева који усмеравају решавање главног проблема.

https://dms.rs/matematika-osnovne-skole/

https://dms.rs/matematika-srednje-skole/

https://petlja.org/biblioteka/r/kursevi/takmicenja%E2%80%90za%E2%80%90osnovce

https://dms.rs/informatika-osnovne-skole/

https://imomath.com/srb/

- Хеуристика – ars inveniendi (lat.)
  (вештина откривања)
- Савремена хеуристика – art of problem solving
  (eng./“savremeni lat.“)
  (вештина решавања проблема)

Хеуристика **Савремена хеуристика**

Проблемска ситуација Проблем

Процес откривања Процес решевања

Папус (290–350 н.е.) – Συναγωγή („Ризница анализе…“)

Декарт (1596–1650) – Regulae ad directionem ingenii (Правила за вођење ума)

Лајбниц (1646–1716) – необјављени фрагменти о умећу проналажења

Ништа није важније него видети изворе проналажења који су по мом мишљењу интересантнији од проналазака самих

Болцано (1781–1848) – Wissenschaftslehre (Настава науке)

Поја (Поља, 1887–1985) – How to solve it

Т. Тао (1975–) Solving Mathematical Problems, A Personal Perspective

https://artofproblemsolving.com/

Откриће Решење

ПРОБЛЕМСКА СИТУАЦИЈА		
Стварање појма		Решавање проблема
Предмети, појаве, представе, формирани појмови, ...	Мисаоне операције	Искуство, знање, вештине стечено решавањем одређених проблема
Уочавање сличности (разлика) са познатим представама и појмовима	Аналогија	Уочавање сличности са познатим проблемима
Рашчлањавање целине на делове; уочавање особина појединих делова и аспеката ситуације	Анализа	Шта је дато? Шта се тражи? Рашчлањавање онога што се тражи због уочавања веза са оним што је дато?
Састављање делова и дубље сагледавања целине. На који начин својства делова утичу на својства целине?	Синтеза	Конструкција онога што се тражи на основу датих података и делова добијених анализом.
Одбацивање неважних особина предмета, одн. аспеката појаве	Апстракција	Уочавање суштински важних веза између датог и траженог
Стварање појма на основу апстрахованих особина	Генерализација	Формирање општег приступа решавању проблема одговарајућег типа

Упоређивање/аналогија

- **Упоређивање** или аналогија је мисаони процес који се састоји у утврђивању сличности међу предметима; разликовање или дискриминација јесте процес налажења разлика међу предметима и појавама.

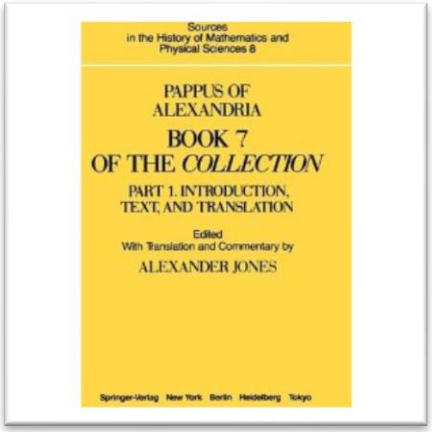
  [грч. *аналогиа* – склад, правилност, однос, сродност]
- **Људска меморија ради по принципу препознавања шаблона.**
- Позитивна аналогија = сличности
- Негативна аналогија = разлике

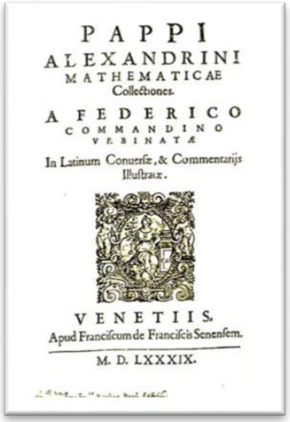
Анализа и синтеза

- **Анализа** је рашчлањавање појава и предмета на једноставније делове.
- **Синтеза** је повезивање рашчлањених делова.
- Најчешће се примељују комбиновано, дајући јединствену **аналитичко-синтетичку методу**.

Вештина решавања задатака

- **Папус** (грчки математичар, живео око 300. год.) Седма књига његовог чувеног дела *Collectiones* садржи “Ризницу анализе” (у слободном преводу “вештине решавања задатака”, или “хеуристике”).





- **Папусова** “Ризница анализе” почиње дефиницијама анализе и синтезе:

Вештина решавања задатака

- *Анализа* узима оно што се тражи као да је већ нађено и полази од тога преко узастопних полседица до нечега што се узима као почетак синтезе; јер у анализи узимамо да је оно што се тражи већ учињено и питамо се чија је то последица, и опет шта је узрок последњег, и тако даље све док идући оваквим корацима не стигнемо до нећег што је већ познати или што припада класи првих начела. Овакву методу називамо анализом као решавање уназад.
- *Синетза* је обнут процес, у њој узимамо као учињено то што је у анализи било последње достигнуто и срeђујући у њиховом природном поретку као последице оно што су пре биле претпоставке и спајајући их редом једну за другом коначно долазимо до конструкције онога што је било тражено; и то зовемо синтезом.

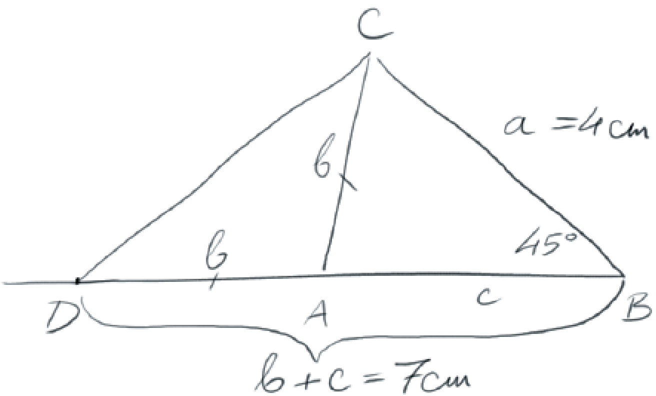
Вештина решавања задатака

Папус је своју методу решавања задатак илустровао на **конструктивним задацима**.

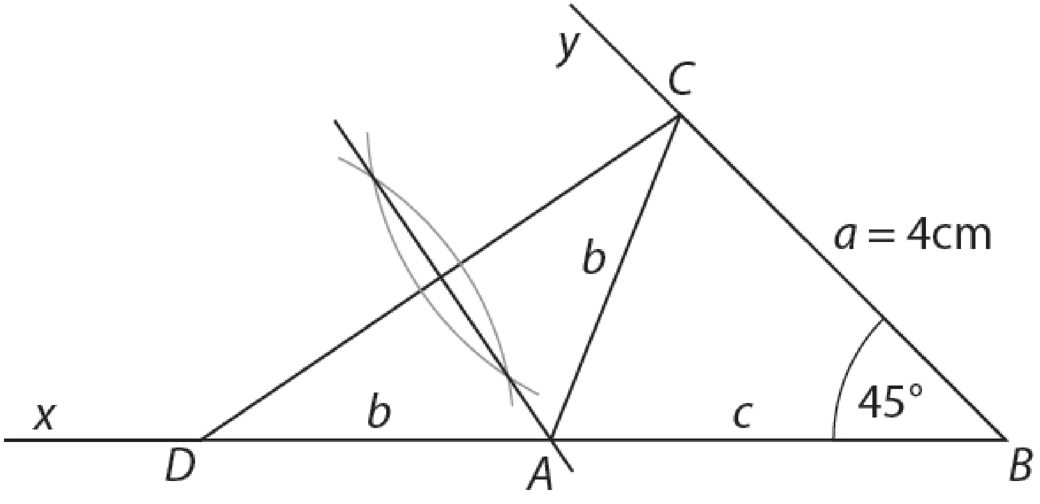
Задатак 33. Конструиши ΔABC ако је дато a, $b + c$, β.

Конструишимо ΔABC тако да је $a = 4\text{cm}$, $b + c = 7\text{cm}$, $\beta = 45°$.

АНАЛИЗА



КОНСТРУКЦИЈА



Доказ

Дискусија

Задатак. Доказати неједнакост (AG)

Пођимо од очигледне
неједнакости ...

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Анализа и синтеза

Неједнакост јесте очигледна, али има и других које су очигледне па не полазимо од њих ...

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$$

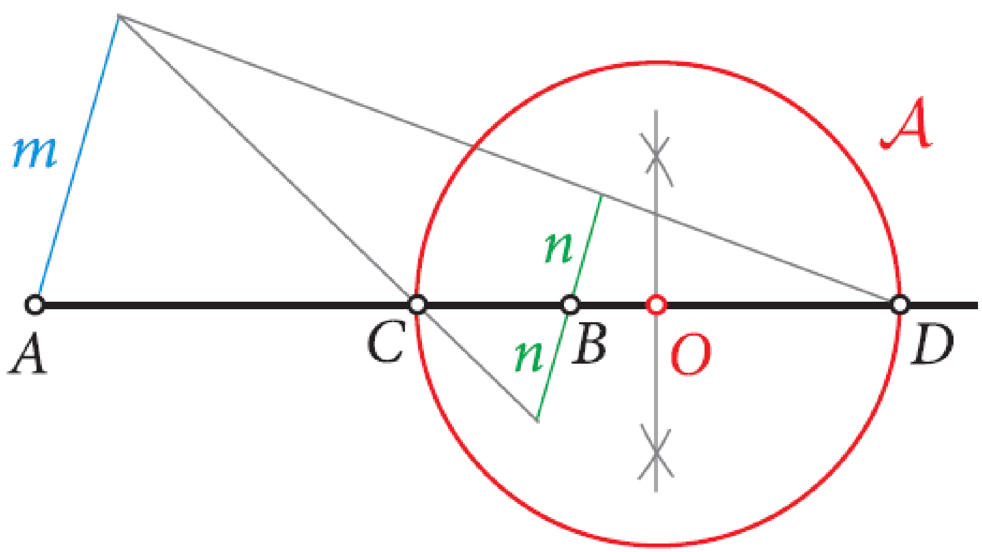
Анализа и синтеза

- АНАЛИЗА (Како да докажем?)
- СИНТЕЗА (Ево доказа!)

- Аналитичка и синтетичка геометрија

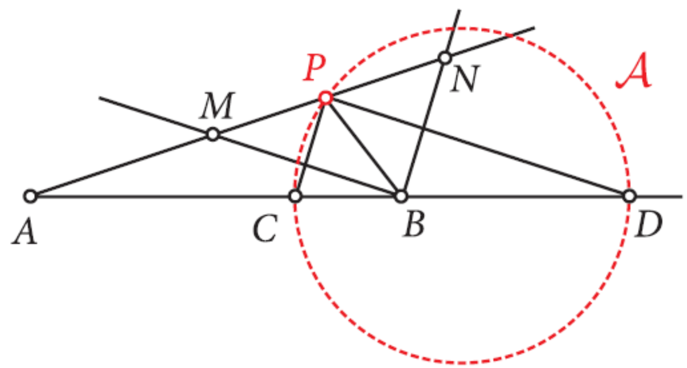
Аполонијева кружница

Нека су A и B две дате тачке и m и n дате неподударне дужи. Докажи да скуп свих тачака P таквих да је $PA : PB = m : n$ представља кружницу.



Аполонијева кружница

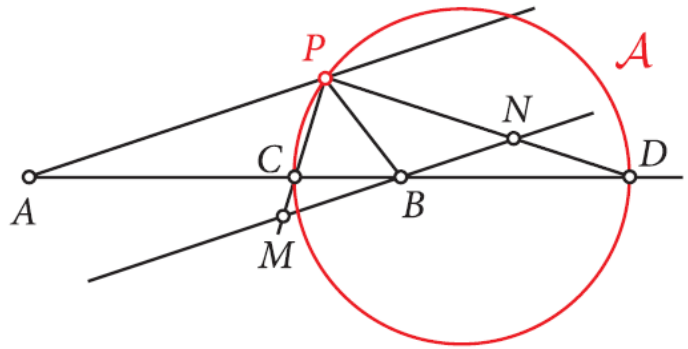
Нека су C и D тачке праве AB такве да је $AC : BC = AD : BD = m : n$. C и D су и једине тачке праве AB које задовољавају постављени услов.
Нека је P произвољна тачка која није колинеарна са A и B таква да је $AP : BP = m : n$. Доказаћемо да је угао CPD прав (а тиме и да P припада кружници над пречником CD).



Конструишимо кроз B праве BM и BN такве да је $BM \parallel PD$ и $BN \parallel PC$, при чему M и N припадају правој AP (види слику изнад). Тада је $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{PN} = \frac{AD}{BD} = \frac{AP}{PM} = \frac{m}{n} = \frac{AP}{BP}$, па је $PN \cong PM \cong BP$, одакле следи да је $\sphericalangle MBN$ прав. Због подударности углова са паралелним крацима, следи да је и $\sphericalangle CPD$ такође прав, што је и требало доказати.

Аполонијева кружница

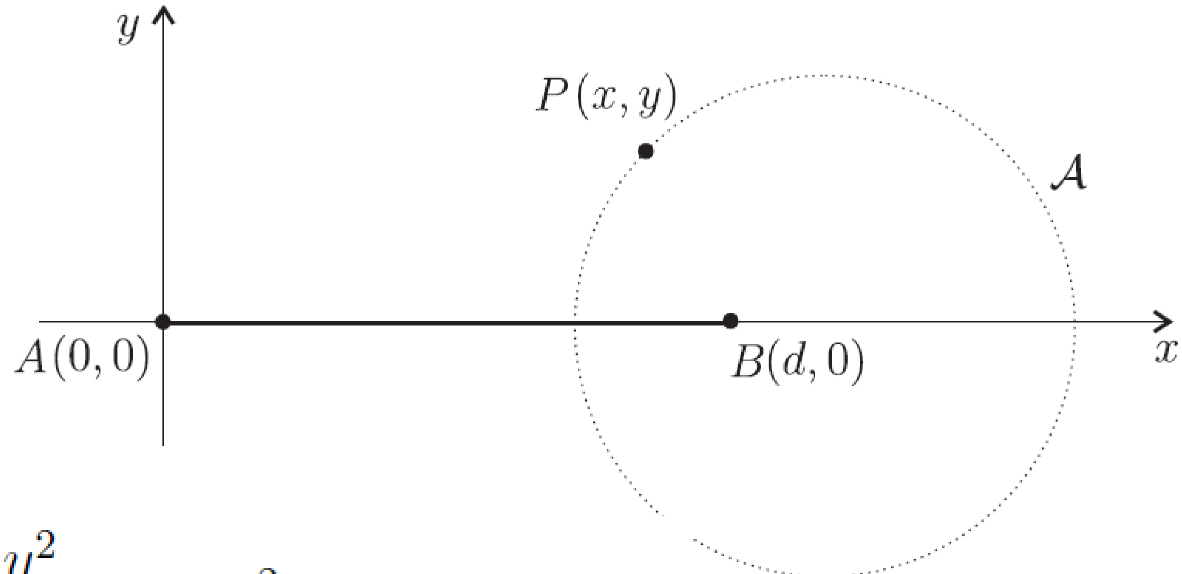
Докажимо и обрнуто, да свака тачка P кружнице над пречником CD задовољава једнакост $AP : BP = m : n$. Нека је P произвољна тачка кружнице над пречником CD. Конструишимо кроз B праву паралелну са AP и означимо са M и N пресеке ове праве са дужима PC и PD (види слику испод).



Тада је $\dfrac{AP}{MB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AP}{NB}$, одакле следи да је $MB \cong NB$, то јест да је B средиште хипотенузе MN правоуглог троугла MPN. Дакле, $BM \cong BN \cong PB$, па из претходних једнакости добијамо да је $AP : BP = m : n$.

Аполонијева кружница

- II начин



$$\frac{PA}{PB} = k \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{(x-d)^2+y^2} = k^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2\frac{dk^2}{k^2-1}x+\frac{d^2k^2}{k^2-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{dk^2}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{d^2k^2}{(k^2-1)^2}.$$

Апстракција и генерализација

- Основни процеси при формирању појмова јесу **апстракција** и **генерализација**.
- Апстракција је издвајање одређених карактеристика групе предмета, а занемаривање других својстава предмета која се одбацују као небитна.

[abstrahere = извлачити, одвајати; trahere = вући]

- Генерализација или уопштавање састоји се у повезивању апстракцијом издвојених карактеристика у једну целину, а уз знање да се те одвојене одлике могу наћи и у другим случајевима и да ћемо увек кад буду те карактеристике заједно дате, имати посла са истом врстом предмета или појава.

[generalisatio – уопштавање]

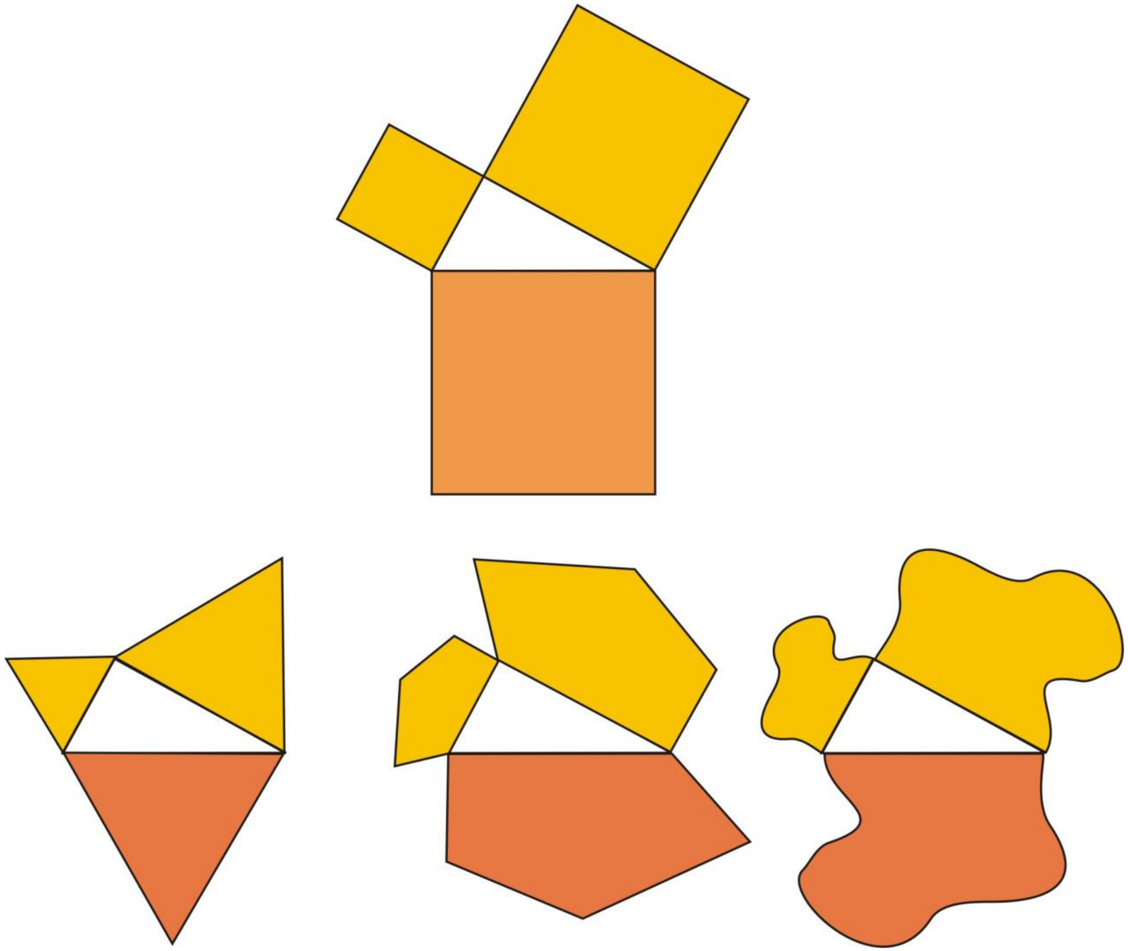
Уопштење Питагорине теореме

Задатак 1. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су једнакостранични троуглови. Испитај да ли је збир површина троуглова над катетама једнак површини троугла над хипотенузом.

Задатак 2. Над страницама правоуглог троугла са спољашње стране конструисани су правилни шестоуглови. Испитај да ли је збир површина шестоуглова над катетама једнак површини шестоугла над хипотенузом.

Задатак 3. Странице правоуглог троугла су основице једнакокрако-правоуглих троуглова конструисаних са спољашње стране. Испитај да ли је збир површина троуглова над катетама једнак површини троугла над хипотенузом.

Генерализација



Уопштење задатка

- **Задатак**. Дати су права и правилан октаедар. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог октаедра.

- Општији задатак. Дати су права и централно симетрично тело. Одреди раван која садржи дату праву и полови запремину датог тела.

Преглед кључних компетенција

- Решавање проблема

  Ученик је у стању да препозна, разуме и реши проблемске ситуације у којима решење није видљиво на први поглед, користећи знања и вештине стечене из различитих предмета. Решавање проблема подразумева и спремност ученика да се ангажује и конструктивно и промишљено допринесе решавању проблема са којима се суочава заједница којој припада.

Математички задаци – Зашто? Какви?

- Математички задаци – саставни део учења математике
- По некима, решавање математичких задатака заузима значајније место у образовању појединца него поједини математички садржаји.
- Математика се најбоље учи решавањем задатака.

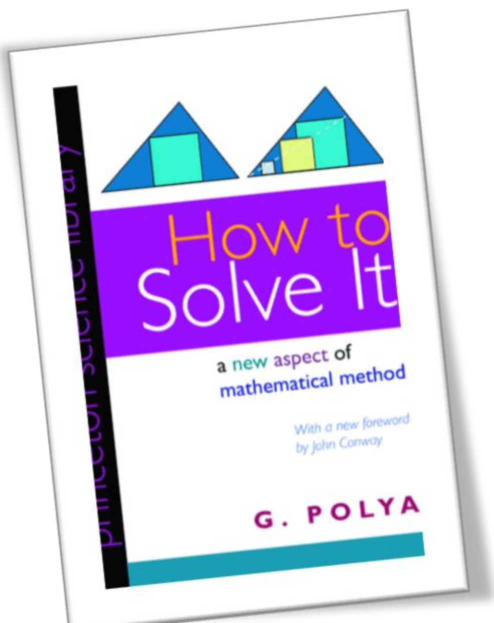
Математички задаци – Зашто? Какви?

- Нове тенденције у обазовању намећу потпуно другачији тип школских задатака.
  - Концепт испред поступка.
  - Разумевање испред репродукције.
  - Знање испред оцене.

Како решавати задатак?

1887– 1985

George Polya
HOW TO SOLVE IT
A new aspect of
mathematical method
Princeton University Press
1945



Превод:
George Polya
KAKO ĆU RIJEŠITI
MATEMATIČKI ZADATAK

Školska knjiga, Zagreb
1966

Из предговора

... при решавању сваког проблема има нешто сазнајно. И при најскормнијем задатку, ако он буди интересовање, ако покреће довитљивост, и ако га ученик решава сопственим снагама, доживеће напетост и тријумф проналазача. Такви доживљаји у периоду који је приступачан утисцима могу створити склоност ка умном раду и утиснути доживотни печат на дух и карактер.

Ту је велика прилика за наставника математике.

Из предговора

Ако наставник с ученицима само механички “теше” увежбане поступке, смањује њихово интересовање и кочи њихов интелектуални развој. Но ако он у својим ученицима буди радозналост дајући им задатке који су примерени њиховом знању и ако им помаже стимулативним питањима, развијаће у њима склоност за самосталним мишљењем и показивати им путеве до њега.

Из предговора

... ученик, чак и ако је природно надарен за математику, мора најпре мора да открије своје способности и склоности. Он не може знати да ли воли ћевапчиће ако их никада није окусио. Нека ученик дође до закључка да математички проблем може пружити исто толико задовољства као и укрштеница, или да интензивни умни рад може бити једнако угодан као напета партија тениса. Окуси ли једном радост у математици, неће је лако заборавити...

Из предговора

Проучавамо ли методе решавања задатака, запазићемо два лица математике. Математика јесте строга систематска дедуктивна наука, али је математика у настајању експериманталнa индуктивна наука.

Како решавати задатак?

Прво

Треба да разумеш задатак.

Друго

Потражи везу између задатог и непознатог! Ако се не може наћи непосредна веза, мораћеш можда разматрати помоћне задатке. Најзад треба да добијеш план решавања.

Треће

Изврши свој план!

Четврто

Провери добијено решење!

Прво ... да разумеш ...

- Шта је непознато? Шта је дато? Какве су везе између датог и непознатог?
- Да ли је могуће задовољити услове задатка? Да ли су услови довољни за одређивање непознатог? Или нису довољни? Можда је задатак *преодређен*? Или контрадикторан?
- Нацртај слику! Уведи погодне ознаке!
- Анализирај дате услове!

Друго ... направи план...

- Да ли си се већ срео/ла са неким сличним и сродним задатком?
- Можеш ли задатак другачије формулисати?
- Ако не можеш одмах да решиш постављени задатак, покушај најпре да смислиш неки једноставнији: општији задатак, специјалнији задатак, аналогни задатак.
- Шта се све може извући из задатих података? Покушај да одредиш који би други подаци били погодни за одређивање непознате!
- Да ли си узео/ла све дате податке заједно?

Треће ... извршии план ...

- Контролиши сваки корак решавања! Можеш ли јасно објаснити зашто је сваки корак исправан? Можеш ли доказати да је исправан.

Четврто ... провери...

- Објасни читав поступак решавања!
- Можеш ли резултат добити другачије?
- Можеш ли метод применити при решавању неког другог задатка?
- Постави питања!

Решење на више начина

- Кориснијe је решити један исти задатак на неколико начина него решити неколико задатака – сваки на један начин. Ако се један исти задатак реши на разне начине, може се упоређивањем решења утврдити које је од њих краће, ефектније, елегантније. На тај начин се стиче и изграђује вештина решавања задатака.

W. W. Sawyer, Prelude to Mathematics

Проблемска настава

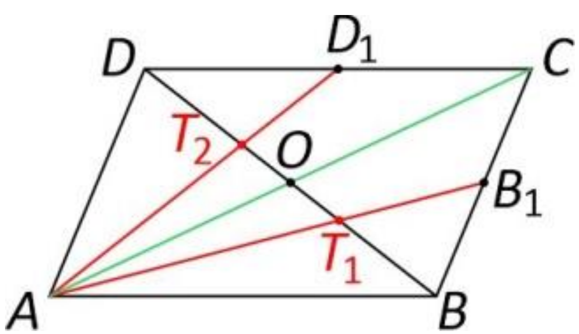
1. Уочавање проблема (формулација)
2. Разјашњавање проблема (анализа проблема)
3. Постављане хипотеза и процењивање њихових последица
4. Верификација хипотеза
5. Анализа резултата, извођење закључака, генерализације
6. Примена

ЗАДАЦИ

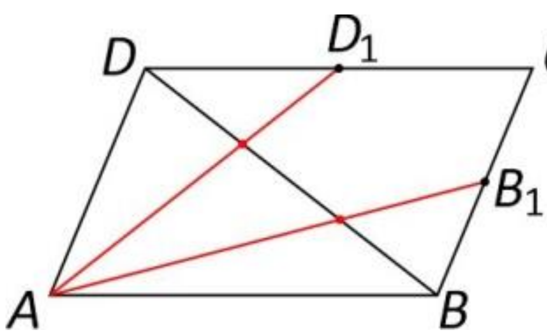
рутина | креативност

Прелаз са шаблонских на проблемске задатке не сме бити нагли. Ниво захтева се мора постепено повећавати.

Задатак. 1) Нацртај паралелограм $ABCD$ и пресек дијагонала означи словом O.
2) Одреди средишта B_1 и D_1 редом страница CB и CD.
3) Одреди тежишта T_1 и T_2 редом троуглова ABC и ACD.
4) Упореди дужи BT_1, T_1T_2 и T_2D.



Задатак. Из темена A паралелограма $ABCD$ конструисане дужи AB_1 и AD_1, где су B_1 и D_1 редом средишта страница CB и CD. Докажи да тачке пресека ове две дужи са дијагоналом BD деле ову дијагоналу на три једнака дела.



ДМС 2021

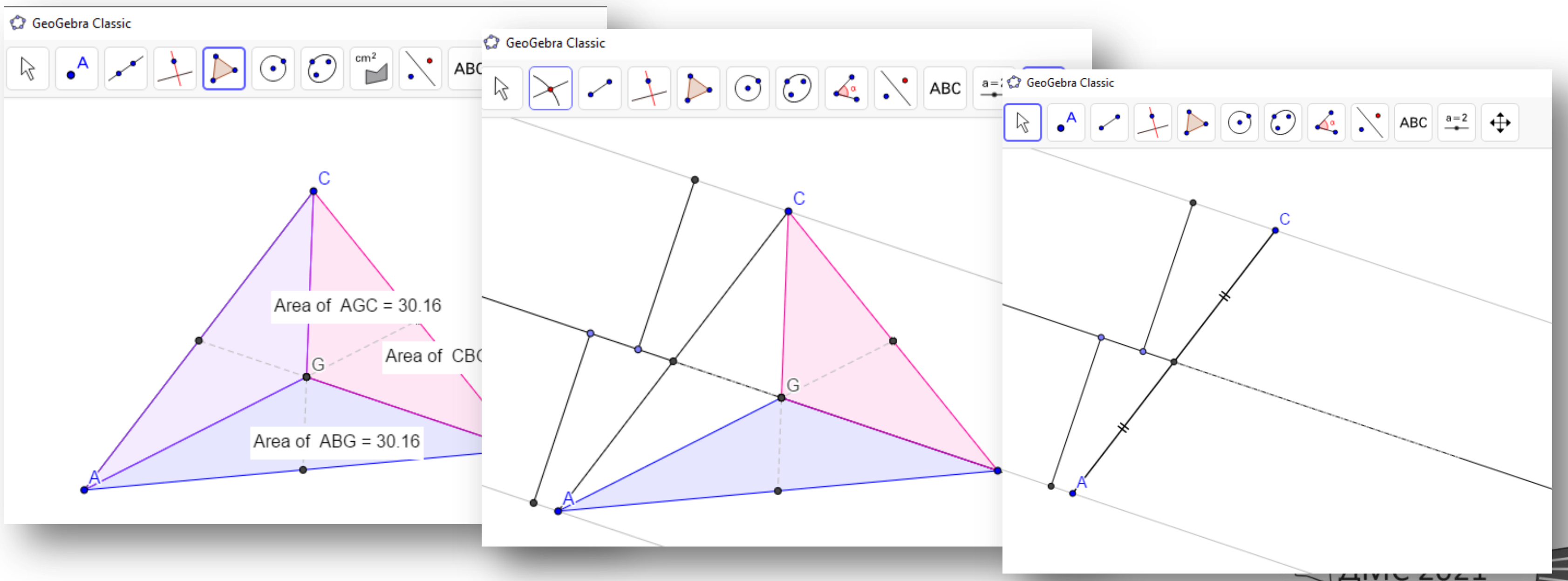
ЗАДАЦИ

рутина | **креативност**

Истраживачки задаци отвореног типа веома су погодни и за отварање и за затварање једне наставне целине.

Задатак. Ако је G тежиште троугла ABC, докажи да су површине троуглова ABG, BCG, CAG једнаке.

Задатак. Ако је G тежиште троугла ABC, упореди површине троуглова ABG, BCG, CAG.



ikodinovic@matf.bg.ac.rs

Задаци 63. и 64.

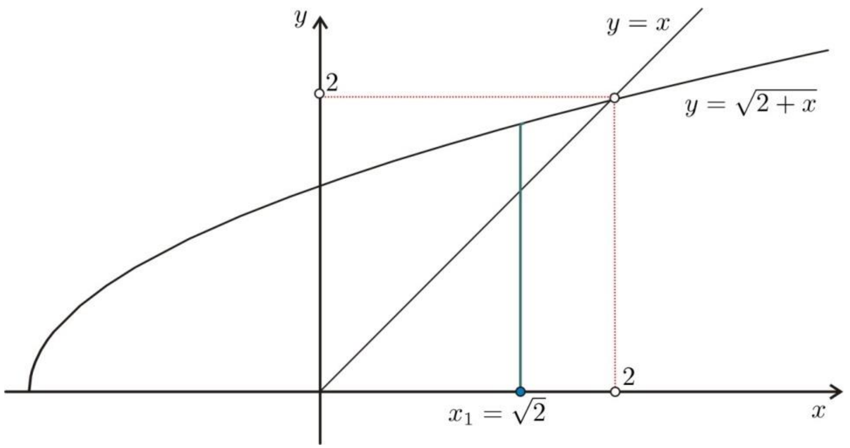
1. Доказати да за сваки природан број n важи

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < 2.$$

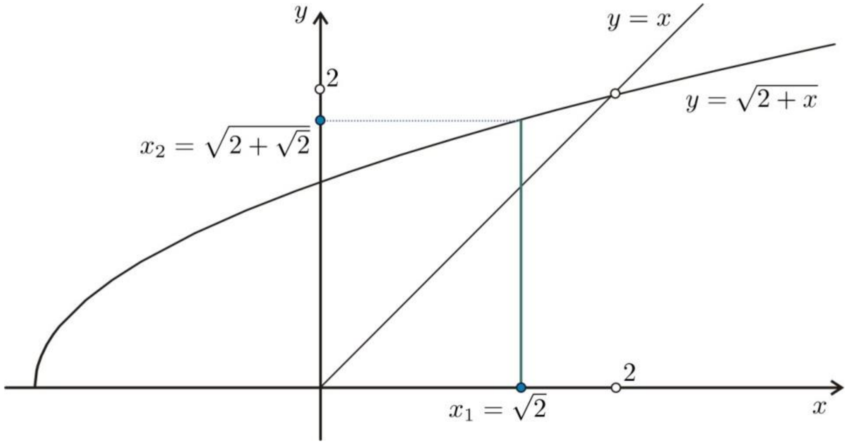
2. Наћи, ако постоји, бар један број a такав да за сваки природан број n важи

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корена}} < a.$$

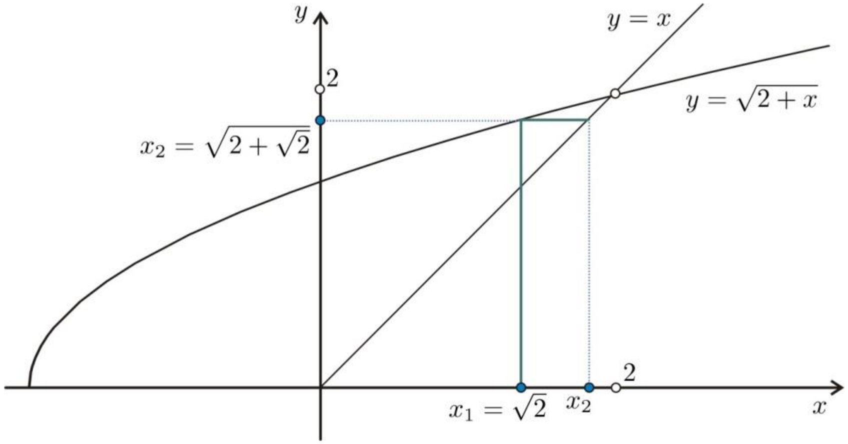
$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$



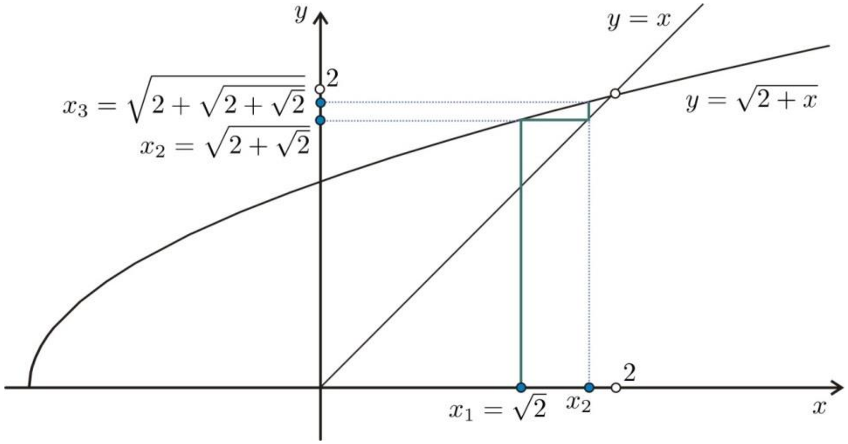
$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$



$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$



$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n \geq 1$$



Решавање проблема – примери (pdf)