МЕТОДИКА НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ И РАЧУНАРСТВА – МНВР модули

Пример теста за 2023/2024
(избор задатака из прошлогодишњих рокова)

Испит траје 2 сата.

1. [10 поена]

Показати да за све природне бројеве n важи $2\sqrt[n]{n!} \leq n+1$.

2. [10 поена]

Нека је $ABCD$ правилан тетраедар ивице 1. Раван α је нормална на ивице AB и AC и полови их. Одредити површину пресека равни α и тетраедра $ABCD$.

3. [10 поена]

За округлим столом седи 20 витезова означених бројевима од 1 до 20. Два витеза су у сукобу ако и само ако је збир њихових бројева једнак 20. На колико начина можемо изабрати 5 витезова међу којима нема непријатеља.

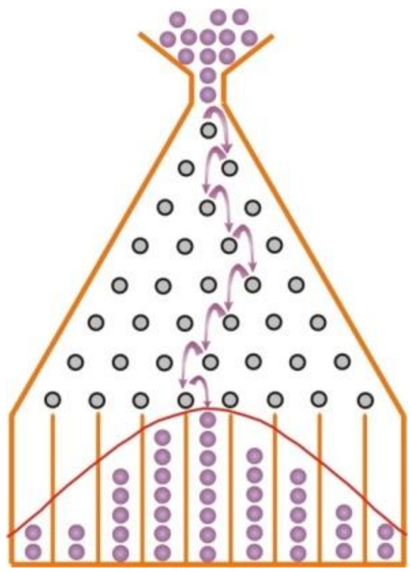
4. [10 поена]

Доказати Чевијеву теорему: На правама BC, CA, AB које одређују странице троугла ABC дате су редом тачке A_1, B_1, C_1. Праве AA_1, BB_1, CC_1 су међусобно паралелне или се секу у једној тачки акко је

$$\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = 1.$$

5. [10 поена]

На слици је приказана варијанта Галтонове табле (уређаја који се често користи за популаризацију математике). Са врха табле испуштају се куглице које треба да прођу кроз правилну троугаону мрежу клинова и стигну до преграда на дну табле. Путујући кроз мрежу клинова, куглица се на сваком нивоу судара са по једним клином и скреће лево или десно са једнаком вероватноћом.



1) Таблу чине клинови распоређени у k хоризонталних редова и самим тим $k+1$ преграда у које куглице могу да упадну. Одредити вероватноћу да куглица упадне у i-ту кутију, $1 \leq i \leq k+1$.

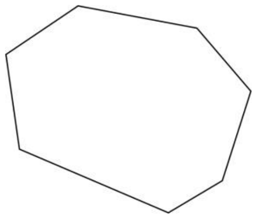
2) Што више има хоризонталних редова клинова и пуштених куглица, у преградама ће се гомилати куглице тако да формирају познату криву. О којој кривој је реч? Објаснити описану појаву?

3) Која позната математичка тврђења илуструје Галтонова табла?

6. [10 поена]

Један од најпознатијих математичких проблема, формулисан пре више од две и по хиљаде година, познат је под називом **Квадратура круга**. Вековима су математичари (научници и многобројни аматери и љубитељи математике) покушавали да одговоре на питање „Да ли је могуће лењиром и шестаром конструисати квадрат чија је површина једнака површини датог круга?“. Тек је у 19. веку показано да је одговор на

Да ли је могућа квадратура било ког задатог конвексног полигона. Прецизније, да ли је могуће лењиром и шестаром конструисати квадрат чија је површина једнака површини задатог конвексног полигона? Описати конструкцију или објаснити зашто је она немогућа.



7. [10 поена]

Решити наредни задатак. Детаљно анализирати рад ученика и навести све што је погрешно у наведеном решењу.

Задатак. Одредити скуп свих вредности реалног параметра a за које једначина

$$2^{|x|} - 2^{-|x|} = a \cdot 2^x$$

има максималан број решења.

Решење ученика Н.Н.

1° Ако је $x \geqslant 0$, онда $2^x - 2^{-x} = a \cdot 2^x \ / : 2^{-x}$

$$2^{2x}(1-a) = 1$$

$$2x = \log_2 \frac{1}{1-a}$$

$$2x = -\log_2(1-a)$$

$x = -\frac{1}{2}\log_2(1-a) < 0 \ \lightning \ x \geqslant 0$ нема решења.

2° Ако је $x < 0$, онда

$$2^{-x} - 2^x = a \cdot 2^x$$

$$2^{-x} = (1+a) 2^x$$

$$-2x = \log_2(1+a)$$

$x = -\frac{1}{2}\log_2(1+a)$ има решења ако је $a+1>0$

$a > -1$

Решење је $\boxed{a>-1}$.