MNMR – разни задаци

Задатак Прецизно формулисати и доказати:

- Основна теорема аритметике
  За сваки природни број n већи од 1 постоје јединствени прости бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_k$ такви да је $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ и јединствени природни бројеви $m_1, m_2, \ldots, m_k$ већи од 0 такви да је $n = p_1^{m_1} p_1^{m_1} \cdot p_1^{m_1}$.
- Основна теорема алгебре
  Сваки полином степена ≥ 1 са комплексним коефицијентима, има бар један корен у пољу комплексних бројева.
- Основна теорема калкулуса (Њутн-Лајбицова формула …)
- Талесова теорема (једна од најстаријих теорема геометрије): Паралелно пројектовање је трансформација сличности
- Број π је ирационалан.
- Простих бројева има бесконачно много.
- Чевијева и Менелајева теорема.
- Постоји тачно пет правилних полиедара (Платонових тела).

Задатак Доказати следећу теорему.

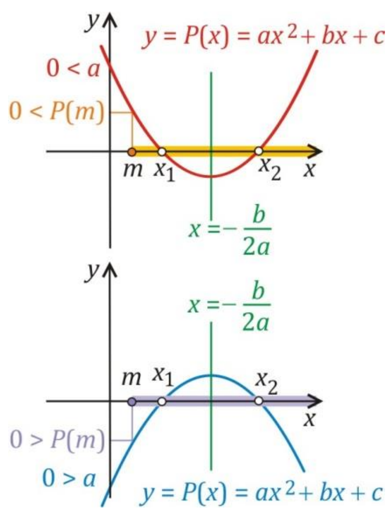
ТЕОРЕМА 2.3. (***Теорема о остатку***) *Нека је $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$. Тада постоје јединствени бројеви $q, r \in \mathbb{Z}$ такви да је*

$$a = bq + r, \qquad 0 \leqslant r < b.$$

*Број q назива се **количник**, а број r **остатак** при дељењу броја a бројем b.*

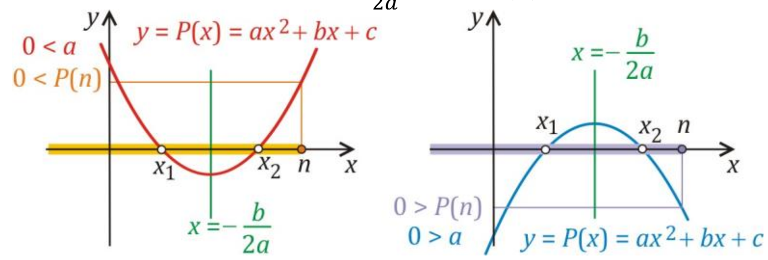
Задатак а) Описати и објаснити Еуклидов алгоритам.
б) Одредити највећи заједнички делилац бројева 942 и 444.
в) Одредити целе бројеве α и β тако да је $942\alpha + 444\beta = \mathrm{nzd}(942, 444)$.

Задатак Нека су m и n природни бројеви и $m < n$. Од правоугаоника чије су димензије $m \times n$ одсецани су квадрати странице m док год није остао правоугаоник чија је једна страница краћа од m. Од добијеног правоугаоника одсецани су квадрати чије су странице једнака дужини краће странице правоугаоника, док год је то било могуће. На ново добијени правоугаоник је поново примењен исти поступак. Наравно поступак се зауставља када се након одсецања одговарајућих квадрата добије квадрат. Одредити димензије последњег квадрата добијеног резањем правоугаоника.

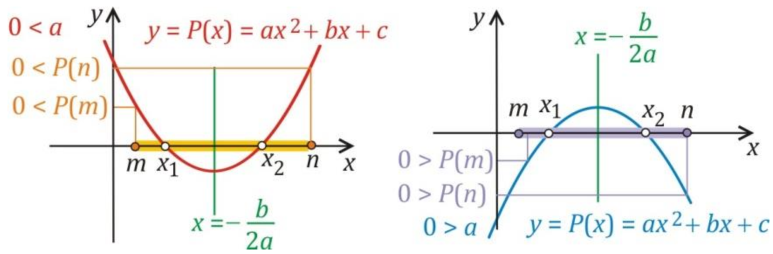


Задатак
Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) и нека је m неки реалан број. Означимо са $P(x)$ полином $ax^2 + bx + c$.
а) Доказати да су оба решења x_1 и x_2 дате једначине већа од m акко важи $D \geq 0$, $m < -\frac{b}{2a}$ и $P(m) \cdot a > 0$.
б) Докажи да је једно решење мање од m, а друго веће од m акко важи $D > 0$ и $P(m) \cdot a > 0$.

Задатак
Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) и нека је n неки реалан број. Означимо са $P(x)$ полином $ax^2 + bx + c$. Докажи да су оба решења x_1 и x_2 дате једначине мања од n акко важи $D \geq 0$, $-\frac{b}{2a} < n$ и $P(n) \cdot a > 0$,



Задатак
Нека су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$), а m и n неки реални бројеви такви да је $m < n$. Докажи да оба решења x_1 и x_2 припадају интервалу (m, n) ако и само ако је $D \geq 0$, $m < -\frac{b}{2a} < n$, $P(m) \cdot a > 0$ и $P(n) \cdot a > 0$, при чему је
$P(x) = ax^2 + bx + c$.



Задатак Одреди све вредности реалног параметра p тако да решења једначине $4x^2 - 2x + p = 0$ припадају интервалу $(-1, 1)$.

Задатак У једном уџбенику математике за први разред средње школе описан је поступак познат под називом **рачун мешања**. Поступак је описан на следећем уопштеном примеру.

> Треба помешати две врсте робе, чије су цене a дин/kg и b дин/kg, $a > b$, да би се добила роба по цени од c дин/kg. Одредити у којој размери треба мешати ове две врсте робе.

Даље у уџбенику стоји да се до решења долази помоћу следеће шеме:

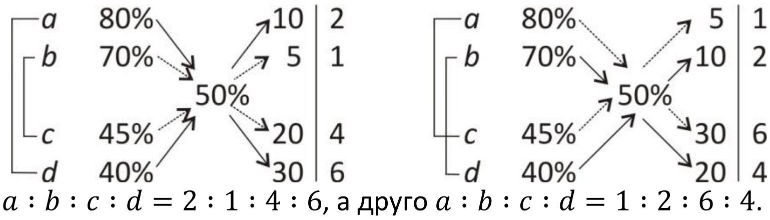
x kg по a дин.		$c - b$	
	c дин.		$x : y = (c - b) : (a - c)$
y kg по b дин.		$a - c$	

а) Како се наведени уопштени задатак може решавати без наведене шеме? Одговор заправо треба да представља образложење наведе шеме.
У истом уџбенику, након наведеног уопштеног примера, појављује се и следећи сложенији пример.

(∗) У којој размери треба помешати растворе алкохола јачине 80%, 70%, 45% и 40% да би се добио раствор са 50% алкохола?

Дато је следеће решење:

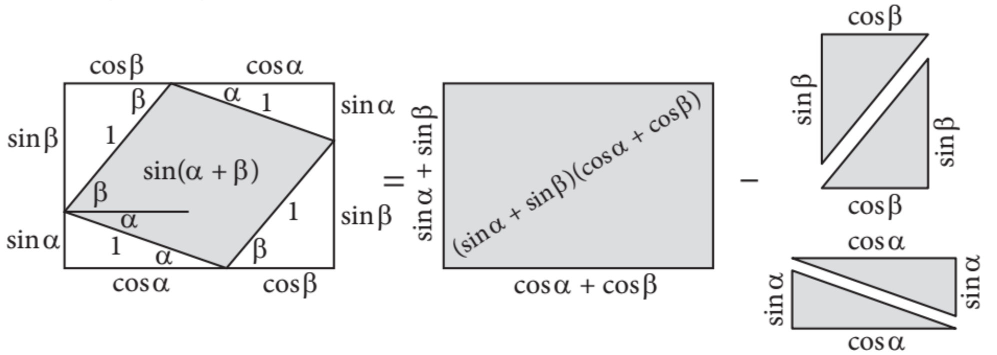
> Помешаћемо један јачи и један слабији раствор. Постоје две комбинације: a са d и b са c, или a са c и b са d.



Једно решење је $a : b : c : d = 2 : 1 : 4 : 6$, а друго $a : b : c : d = 1 : 2 : 6 : 4$.
б) Решити проблем (∗) без наведених шема?

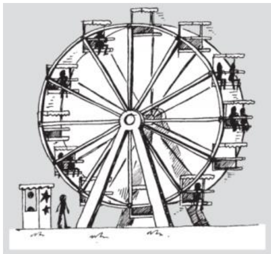
Задатак

а) Користећи слику, доказати да за свака два оштра угла α и β важи једнакост $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.



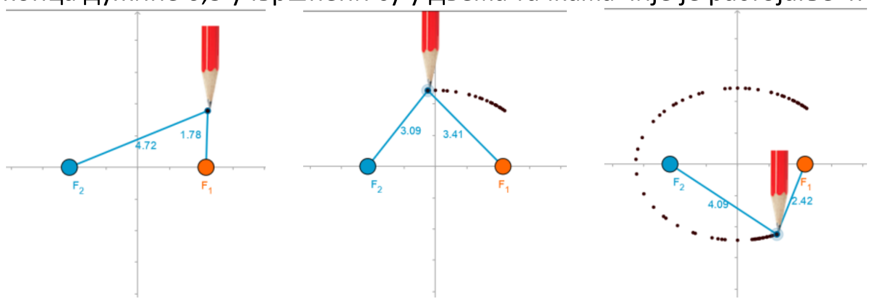
б) Доказати да за свака два реална броја x и y важи једнакост
$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$.

Задатак Уводни проблеми за тему Тригонометријске функције често се односе на ротациона кретања. На пример, посматра се кретање Панорамског точка. Панорамски точак полупречника 10 m креће се константном брзином и пун круг обиђе за 100 секунди. На свакој корпи налази се по једна сијалица: када је корпа у најнижем положају, сијалица је 2 m изнад земље.



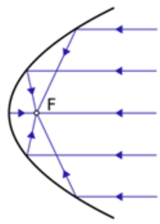
а) Описати законитост $h = F(t)$ којом се одређује висина h једне изабране сијалице од земље у тренутку t, претпостављајући да је у почетном тренутку ($t=0$) висина те сијалица најмања.

Задатак ГеоГебра интерактивни прилог приказује познати поступак цртања елипсе: крајеви конца дужине 6,5 учвршћени су у двема тачкама чије је растојање 4.



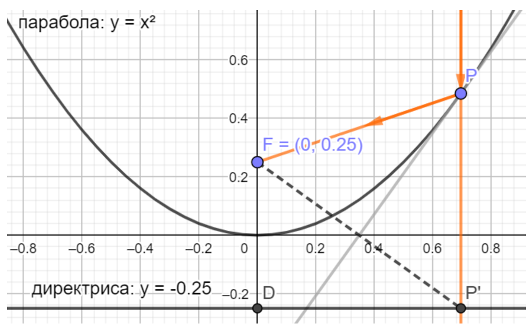
Одредити једначину елипсе у односу на координатни систем приказан на слици.

Задатак Параболична огледала имају примене од давнина, након што је старогрчки математичар Диокле доказао да се паралелни зраци светлости након одбијања од параболичног огледала скупљају у једну тачку, жижу. Позната је прича о томе како је Архимед параболичним огледалом „сакупио“ Сунчеве зраке у жижу огледала, усмерио их на непријатељске бродове и тако их запалио.

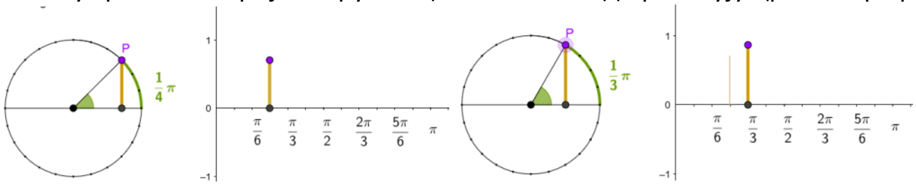


На примеру параболе $y = x^2$ објаснити и доказати *закон одбијања од параболичног огледала*: зраци паралелни оси симетрије параболе након одбијања пролазе кроз жижу те параболе.

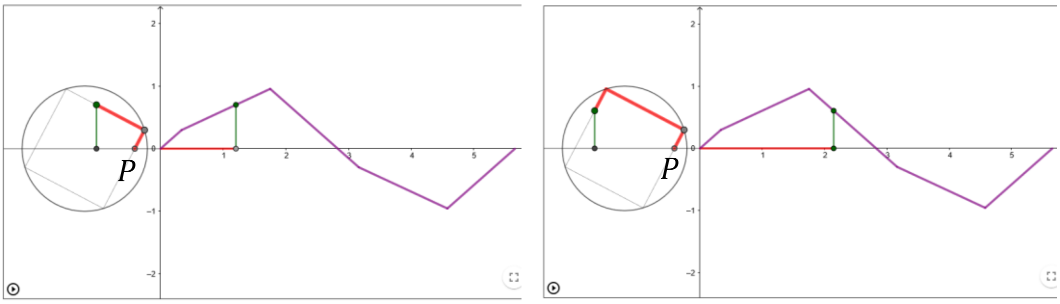
Напомене: (1) У доказу се могу користити и изводи.
(2) Угао између упадног зрака и тангенте у одговарајућој тачки једнак је углу између одбојног зрака и тангенте.



Задатак ГеоГебра прилози често се користе за цртање графика тригонометријских функција на основу тригонометријске кружнице. Слике испод приказују цртање графика $y = \sin x$.

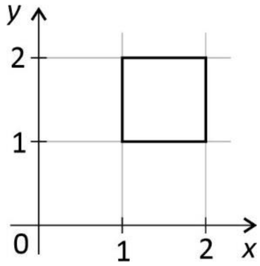


Аналогно се може поступити када се кружница замени неком другом фигуром, на пример, квадратом који је уписан у јединичну кружницу. Ако замислимо да се тачка креће дуж страница квадрата, полазећи са позиције P, зависност између пређеног пута и ординате покретне тачке представљаће једну изломљену линију.



а) Одредити једначину изломљене линије добијене на описани начин.

Напомена. Једначина изломљене линије се састоји од описа свих дужи које чине ту линије. Опис сваке дужи треба да буде облика $y = kx + n$, $a \le x \le b$, где су k, n, a, b параметри које треба одредити.



Задатак Свака тачка (x, y)која припада страницама квадрата приказаног на слици десно пресликава се у тачку $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$. Скицирати затворену линију која се добија тим пресликавањем?

Задатак Која од следећих једначина има највише реалних решења?

(A) $x^3 = 10 - x$; (B) $x^2 + 5x - 7 = x + 8$; (C) $7x + 5 = 1 - 3x$; (D) $e^x = x$; (E) $\frac{1}{\cos x} = e^{-x^2}$

Одговор детаљно образложити.

Задатак

Consider the following algorithm, which takes an input integer $n > 2$ and prints one or more integers.

```
input(n)
set i = 1
while i < n
  begin
    replace i by i + 1
    set k = n
    while k ≥ i
      begin
        if i = k then print(i)
        replace k by k - 1
      end
  end
```

If the input integer is 88, what integers will be printed?

(A) Only the integer 2

(B) Only the integer 88

(C) Only the divisors of 88 that are greater than 1

(D) The integers from 2 to 88 in increasing order

(E) The integers from 88 to 2 in decreasing order

Примери

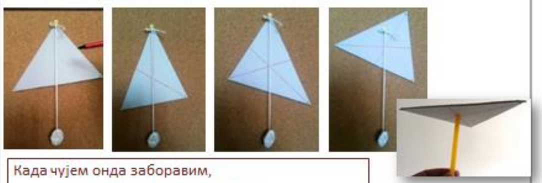
ТЕЖИШТЕ

теорија | пракса

Истраживачки задатак

Одреди центар равнотеже троугаоног картона.

➢ експеримент

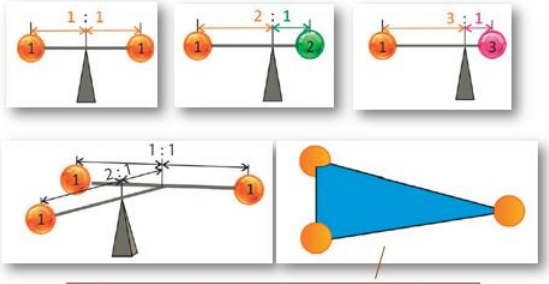


Када чујем онда заборавим,
када видим онда запамтим,
када урадим онда разумем.

ДМС 2021

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

Тежиште троугла (мисони токови)



Где је центар равнотеже троугаоне плоче у чијим су теменима постављене кугле од по 1kg?

10

Проста каматна формула

Уложена сума новца назива се **главница**, док се очекивана добит након одређеног времена назива **камата** или **интерес**. Колика ће камата (добит) бити зависи од договорене **каматне стопе** која се изражава у процентима и представља добит коју би донело инвестирање суме од 100 динара (евра или неке друге валуте која се користи) за годину дана и временског **периода** израженог у годинама.

улог	време	добит
100 дин	1 год	p
G дин	t год	K (?)

$$\frac{K}{p}=\frac{t}{1}\cdot\frac{G}{100}$$

$$K=G\cdot\frac{p}{100}\cdot t=G\cdot p\%\cdot t$$

Штедња и број *e*

- *Сложена каматна формула*: $K=G(1+p\%)^t$

  K је сума новца коју ће добити неко након t година ако је орочио суму G са годишњом каматном стопом $p\%$ при чему се након истека сваке године главница увећава за камату, па се даље рачуна са новом главницом.
- Ако је главница G уложена са каматном стопом $p\%$ која ће се обрачунавати m пута годишње, онда ће укупна сума K након t година бити

$$K=G\left(1+\frac{p\%}{m}\right)^{mt}$$

Штедња и број *e*

- Задатак 48. Препоставимо да је неко уложио 1000€ са каматном стопом 9% и да жели да подигне новац након 2 године. Испитај колику суму новца ће подићи у зависности од тога колико пута годишње ће бити обрачунавана камата.

Штедња и број *e*

- Задатак 48. Препоставимо да је неко уложио 1000€ са каматном стопом 9% и да жели да подигне новац након 2 године. Испитај колику суму новца ће подићи у зависности од тога колико пута годишње ће бити обрачунавана камата.

Обачунавање камате	m	$K=1000\cdot\left(1+\frac{0{,}09}{m}\right)^{2m}$
Годишње	1	1018,081
Полугодишње	2	1192,519
Тромесечно	4	1194,831
Месечно	12	1196,414
Недељно	52	1197,031
Дневно	365	1197,191
На сваких сат времена	8760	1197,216

Штедња и број *e*

$$K=G\left(\left(1+\frac{1}{\frac{m}{p\%}}\right)^{\frac{m}{p\%}}\right)^{p\%t}=G\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{p\%t}$$

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
10	$1{,}1^{10}=2{,}5937424601$
100	$1{,}01^{100}\approx 2{,}704813829421526093267194710807$5
1 000	$1{,}001^{1000}=2{,}7169239322358924573830881219476$
10 000	$1{,}0001^{10000}\approx 2{,}7181459268252248640376646749131$
100 000	$1{,}00001^{100000}\approx 2{,}7182682371744896680350648244 26$
1 000 000	$1{,}000001^{1000000}\approx 2{,}7182804693193768838197997084544$

$$K=Ge^{p\%t}$$

Литература
(Moodle, линкови са http://www.matf.bg.ac.rs/p/nebojsa-ikodinovic/cas/4988/mnmr-2023-24/)

J.Libby, Math for Real Life – TeachingPractical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry

A. Sultan, A. F. Artzt, The Mathematics that Every Secondary School Math Teacher Needs to Know

https://dms.rs/matematika-osnovne-skole/
https://dms.rs/matematika-srednje-skole/
https://dms.rs/kengur/zadaci/