Локални екстремуми

$f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $a \in A$ лок. мин. ако $\exists U(a) \ni x$ $f(x) \geq f(a)$

отв. $a \in U(a)$

строги лок. мин $\quad f(x) > f(a)$

лок. макс. $\quad f(x) \leq f(a)$

строг лок. макс $\quad f(x) < f(a)$

$a \in A$ лок. екст. фје f, f диф у a $\Rightarrow$ $\forall 1 \leq k \leq m$ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

$\Rightarrow df(a) = 0$

$a \in A$ $df(a) = 0 \Rightarrow a$ стационарна тачка

$$A(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{i,j=1}^{m} \rightsquigarrow \Phi(a)(\underbrace{h_1, \dots, h_m}_{\in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}) = [h_1\, h_2 \cdots h_m]\, A(a) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

квадратна форма $\quad = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$

$\forall h \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

$\Phi(a)h \geq 0 \Rightarrow \Phi(a)$ позитивно полудефинитна $\Rightarrow a$ лок. мин.

$\Phi(a)h > 0 \Rightarrow \Phi(a)$ позитивно деф. $\Rightarrow a$ строги лок. мин.

$\Phi(a)h \leq 0 \Rightarrow \Phi(a)$ нег. полудеф $\Rightarrow a$ лок. макс.

$\Phi(a)h < 0 \Rightarrow \Phi(a)$ нег. деф $\Rightarrow a$ строги лок. макс.

Силвестеров крит.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq m$$

$\Phi \leftrightsquigarrow A$

кв. форма задата мат. A

$\det A_1, \det A_2, \dots, \det A_m > 0 \iff \Phi$ позитивно деф

$\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \dots, (-1)^m \det A_m > 0 \iff \Phi$ негативно деф

① $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3k(x+y) + 6xy$, $k \in \mathbb{R}$ диф на $\mathbb{R}^2$

а) Одредити све $k \in \mathbb{R}$ за које f има макс/мин број стационарних тачака.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3k + 6y \quad (=0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 3k + 6x \quad (=0)$

$$\begin{cases} 3x^2+3k+6y=0 \\ 3y^2+3k+6x=0 \end{cases} \quad (-)$$

$3x^2+3k+6y=0 \quad /:3$

$3(x^2-y^2)+6(y-x)=0 \quad /:3$

$x^2+k+2y=0$

$(x-y)(x+y-2)=0$

$1^\circ \; x=y \quad \vee \quad 2^\circ \; x+y-2=0$

$1^\circ \; x=y$

$x^2+k+2y=0 \rightsquigarrow x^2+k+2x=0 \to x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4k}}{2} = -1\pm\sqrt{1-k}$

$(-1+\sqrt{1-k}, -1+\sqrt{1-k}), \; (-1-\sqrt{1-k}, -1-\sqrt{1-k})$

$k>1 \to$ нема решења у $\mathbb{R}^2$

$k=1 \to$ 1 решење $(-1,-1)$

$k<1 \to$ 2 решења $(-1+\sqrt{1-k}, -1+\sqrt{1-k}), \; (-1-\sqrt{1-k}, -1-\sqrt{1-k})$

$2^\circ \; x+y=2 \to y=2-x$

$x^2+k+2y=0 \to x^2-2x+4+k=0 \to x_{1/2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4-16-4k}}{2} = 1\pm\sqrt{-3-k}$

$k<-3 \to$ 2 решења $(1+\sqrt{-3-k}, \underset{2-x}{\underbrace{1-\sqrt{-3-k}}}), \; (1-\sqrt{-3-k}, 1+\sqrt{-3-k})$

$k=-3 \to$ 1 решење $(1,1)$

$k>-3 \to$ 0 решења

$k>1 \to$ нема стац. тачака

$k=1 \to (-1,-1)$

$-3<k<1 \to (-1+\sqrt{1-k}, -1+\sqrt{1-k}), \; (-1-\sqrt{1-k}, -1-\sqrt{1-k})$

$k=-3 \to \underbrace{(-1+\sqrt{1-k}, -1+\sqrt{1-k})}_{(-1+\sqrt{4}, -1+\sqrt{4}) = (1,1)}, \; \underbrace{(-1-\sqrt{1-k}, -1-\sqrt{1-k}), (1,1)}_{(-3,-3)}$

2 стац. тачке

$k<-3 \to (-1+\sqrt{1-k}, -1+\sqrt{1-k}), \; (-1-\sqrt{1-k}, -1-\sqrt{1-k}),$

$(1+\sqrt{-3-k}, 1-\sqrt{-3-k}), \; (1-\sqrt{-3-k}, 1+\sqrt{-3-k})$

4 стац. тачке

б) $\underline{\underline{k=2}}$, $k=1$, $k=-4$ одр. лок. екст. фје f

$\downarrow$

нема лок. екст.

$\overline{k=1} \longrightarrow (-1,-1)$

$$f(x,y) = x^3+y^3+3(x+y)+6xy \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+3k+6y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+3k+6x$$

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & 6y \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix}$$

$$A(-1,-1) = 6\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Phi(-1,-1)(h_1,h_2) = 6(-h_1^2+h_1h_2+h_2h_1-h_2^2)$$

$$= -6(h_1^2-2h_1h_2+h_2^2) = -6(h_1-h_2)^2 \leq 0$$

$\leadsto$ Φ нег. полудеф $\Rightarrow$ $(-1,-1)$ лок. макс.

$\overline{k=-4} \longrightarrow (-1+\sqrt5, -1+\sqrt5), (-1-\sqrt5, -1-\sqrt5), (2,0), (0,2)$

$\downarrow$

за домаћи

$$A(-1+\sqrt5, -1+\sqrt5) = 6\begin{bmatrix} -1+\sqrt5 & 1 \\ 1 & -1+\sqrt5 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(-1+\sqrt5,-1+\sqrt5)(h_1,h_2) = 6\Big(\underbrace{-h_1^2+2h_1h_2-h_2^2}_{-(h_1-h_2)^2} + \sqrt5(h_1^2+h_2^2)\Big)$$

$$A_1 = 6\cdot[-1+\sqrt5] \longrightarrow \det A_1 = 6(-1+\sqrt5) > 0$$

$$A_2 = A \longrightarrow \det A_2 = 6^2\cdot\big((-1+\sqrt5)^2-1\big) > 0$$

$$\| \quad \cancel{1}+5-2\sqrt5-\cancel{1}$$

$$\sqrt5 > 2$$

Силвестер $\Rightarrow$ Φ поз. деф $\Rightarrow$ $(-1+\sqrt5, -1+\sqrt5)$

$\hookrightarrow$ строги лок мин

$$A(-1-\sqrt5,-1-\sqrt5) = 6\begin{bmatrix} -1-\sqrt5 & 1 \\ 1 & -1-\sqrt5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 6[-1-\sqrt5] \longrightarrow \det A_1 = -6(1+\sqrt5) < 0 \qquad (1+\sqrt5)^2$$

$$A_2 = A \longrightarrow \det A = 6^2\cdot\big(\overset{=}{(-1-\sqrt5)^2}-1\big) > 0$$

Силвестер $\Rightarrow$ $\Phi(-1-\sqrt{5}, -1-\sqrt{5})$ негативно деф $\Rightarrow$ $(-1-\sqrt{5}, -1-\sqrt{5})$ строги лок. макс.

$$A(0,2) = 6\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A_1 = 6[0] \rightarrow \det A_1 = 0$$

$\Rightarrow$ Силвестер не каже ништа

$$\Phi(0,2)(h_1,h_2) = 6(h_1h_2 + h_2h_1 + 2h_2^2) = 12(h_1h_2 + h_2^2)$$

$$= 12h_2(h_1+h_2)$$

$h_2 = 1, h_1 = 0 \longrightarrow \Phi(0,2)(0,1) = 12\cdot 1(1+0) = 12 > 0$

$h_2 = 1, h_1 = -5 \qquad \Phi(0,2)(-5,1) = 12\cdot 1(1-5) = -48 < 0$

$\Rightarrow$ Φ мења знак $\Rightarrow$ $(0,2)$ није лок. екстремум.

б) у зависности од k испитати равн непр f на $\mathbb{R}^2$

2) Одредити слику домена и лок. екст. фје

$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

$D_f = \mathbb{R}^3$

$y = 0 = z \rightarrow f(x,0,0) = x^3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0,0) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0,0) = -\infty$ $\Rightarrow f(\mathbb{R}^3) = (-\infty, +\infty)$

стац. тачке:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 12x = 0 \quad /\cdot 6$$

$\rightarrow x = 0, y = 0 \ \vee\ x = 24, y = -144$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z + 2 = 0 \rightarrow z = -1$$

$(0,0,-1)$, $(24,-144,-1)$

$$A(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A(0,0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \Phi(0,0,-1)(h_1,h_2,h_3) = 24\, h_1 h_2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$$
$$= 2\,(12\, h_1 h_2 + h_2^2 + h_3^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(0,0,-1)(1,1,1) = 2\cdot(12+1+1) = 28 > 0 \\ \Phi(0,0,-1)(1,-1,0) = 2(-12+1+0) = -22 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{мења знак}$$

$\Rightarrow (0,0,-1)$ није лок. екстремум

$$A(24,-144,-1) = \begin{bmatrix} 6\cdot 24 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\to D_+$

Силвестер: $A_1 = [6\cdot 24] \to \det A_1 = 6\cdot 24 > 0$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 6\cdot 24 & 12 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \det A_2 = 2\cdot 6\cdot 24 - 12^2 = 2\cdot 12^2 - 12^2 = 12^2 > 0$$

$$A_3 = A \longrightarrow \det A_3 = 2\cdot \det A_2 = 2\cdot 12^2 > 0$$

$\Rightarrow \Phi$ поз. деф $\Rightarrow (24,-144,-1)$ строги лок. мин.

(3) Одредити слику домена и испитати лок. екст. фје $f(x,y) = xy\, e^{-x^2-y^2}$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\lim_{r\to\infty} r^2 \cos\theta \sin\theta\, e^{-r^2} = \lim_{r\to\infty} \underbrace{\cos\theta\cdot\sin\theta}_{\text{огран}}\ \underbrace{r^2 e^{-r^2}}_{\xrightarrow[r\to\infty]{} 0} = 0$$

$\Updownarrow$

$(x,y) \to (\pm\infty, \pm\infty)$

стац. тачке:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{-x^2-y^2} + xy\, e^{-x^2-y^2}(-2x) = 0 \qquad /: e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{-x^2-y^2} - 2xy^2 e^{-x^2-y^2} = 0 \qquad /: e^{-x^2-y^2}$$

$$y - 2x^2 y = 0 \longrightarrow y(1-2x^2) = 0 \Rightarrow y = 0 \ \vee\ x = \pm\frac{1}{\sqrt2}$$
$$x - 2xy^2 = 0 \qquad x(1-2y^2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \vee\ y = \pm\frac{1}{\sqrt2}$$

$\Rightarrow$ стац. тачке $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$b_{++} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $b_{--} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $b_{+-} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $b_{-+} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f(b_{++}) = f(b_{--}) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} \rightarrow b_{++}, b_{--}$ макс. вје $\rightarrow$ лок. макс.

$f(b_{+-}) = f(b_{-+}) = -\frac{1}{2}e^{-1} = -1/2e \rightarrow b_{+-}, b_{-+}$ мин - вје $\rightarrow$ лок. мин

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(x,y) = xye^{-x^2-y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{ll} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0) & f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 1/n^2 e^{-1/n^2} > 0 \\ \left(1/n, -1/n\right) \rightarrow (0,0) & f\left(\frac{1}{n}, -1/n\right) = -1/n^2 e^{-1/n^2} < 0 \end{array}}_{\Downarrow}$$

$(0,0)$ није лок. екст.

$f(\mathbb{R}^2) = \left[-\frac{1}{2e}, \frac{1}{2e}\right]$

јер $\mathbb{R}^2$ повезан $\Rightarrow f(\mathbb{R}^2)$ интервал, а мин и макс. се достижу у $\mathbb{R}^2$.