Задаци за практикуме

1. Нека је $f: X \to Y$ НА. Показати f 1-1 акко $\forall A \subseteq X$ $f(A^c) = f(A)^c$.

2. $F : \mathcal{P}(X) \to \{ f : X \to \{0,1\} \}$, $F(A) = \chi_A$ је 1-1?

3. $f : [0,1) \to [0,1)$ НА. Доказати да онда постоје $x, y \in [0,1)$ тако да $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.

4. Решити:

   а) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$

   б) $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{1/x}$

   в) $\log_{1/3}\left(\log_4 (x^2 - 5)\right) > 0$

   г) $\log_x \sqrt{x + 12} > 1$, $x > 0$, $x \neq 1$

5. Одредити домен ф-је $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\arcsin\left(\ln \frac{x+3}{x+1}\right)\right)$.

6. $H_n \leq G_n$

7. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$?

8. Показати да за $\forall \theta \in \mathbb{R}$ постоји полином са целобројним $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$ коеф облика $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = p(x)$ тако да важи $p(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.

9. $a, b \in \mathbb{R}$. Показати $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}b \cdot a^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}b^{n-1}a^1 + \binom{n}{n}b^n$, где је $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

10. Израчунати у зависности од q и n, $q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

    $S_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n$.

11. Показати $\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sin x_i$ за $0 \leq x_i \leq \pi$, $1 \leq i \leq n$.

12. Показати $n^{n+1} > (n+1)^n$ за $n \geq 3$.

13. $a, b, c > 0$, показати

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

14. $a, b, c, d > 0$ и $a + b + c + d = 1$, показати

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right)\left(\frac{1}{d} - 1\right) \geq 81.$$

15. $a, b, c, d > 0$ показати $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{b+d+a} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$.

16. Одредити sup, inf, max, min ако постоје од:

$A_1 = \left\{ \frac{m+n}{mn+1} \mid m,n \in \mathbb{N} \right\}$

$A_2 = \left\{ \sin\left(\frac{5n-10}{4n+1} \pi \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$A_3 = \left\{ \frac{n^3 (m+1)^m}{8(m^3+2n^3)(-m)^m} \mid m,n \in \mathbb{N} \right\}$

$A_4 = \left\{ \frac{nm^2+2nm-n-4m^2-8m+4}{nm^2+2nm} \mid n,m \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{10n^2}{m^2+m+7n^2} \mid n,m \in \mathbb{N} \right\}$

17. $\emptyset \neq A,B \subset [1,+\infty)$, $C = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in A, b \in B \right\}$

Доказати $\sup C = \frac{\sup A}{\inf B}$.

Одр. у зависности од α $\sup C$ ако

$A = \{ (n+1)^{2/n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$, $B = \{ x(\alpha - x) \mid x \in (0,1), \alpha \in \mathbb{Q} \}$

18. $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$

ρ рел. деф са $(x_1,y_1)\rho(x_2,y_2) \iff x_1<x_2 \vee (x_1=x_2 \wedge y_1 \le y_2)$

σ рел. деф са $(x_1,y_1)\sigma(x_2,y_2) \iff x_1 \le x_2 \wedge y_1 \le y_2$

ρ, σ рел поретка?

$A = [0,1)\times[0,1)$, $\sup_\rho A$, $\inf_\rho A$, $\sup_\sigma A$, $\inf_\sigma A = ?$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = ?$, $|a|,|b|<1$

20. а) Решити ј-ну $6x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n$, $x_0=5$, $x_1=\frac{13}{6}$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{5\cdot(\frac{1}{2})^n + 3\cdot(\frac{1}{4})^n} = ?$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x_n}{5(\frac{1}{2})^n + 3(\frac{1}{4})^n}} = ?$

21. $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{4x_n}{2x_n+3}$. Испитати конвергенцију низа x_n, уколико конвергира, одредити $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

22. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

23. $a>0$, $x_1>0$

$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

24. $a_1 = a \in \mathbb{R}$

$a_{n+1} = 2a_n - a_n^2$

Испитати конв. низа у зависности од a.

25. $a_1 = 0$

$a_{n+1} = (a_n - c)^2$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

26. $x_0 = 1$

$x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 1}{x_n + 2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + b}{1 + b} \right)^n = ?$ $\quad a, b > 0$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 5n + 2}{3n^2 - 5n + 7} \right)^{4n+n^2} = ?$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n + n^5 + 100}{3^n - n^5 - 4^n} = ?$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1\cdot 1!)^2 + (2\cdot 2!)^2 + \dots + (n\cdot n!)^2}{((n+1)!)^2}$

31. $a_0 > 0$, $a_n = \dfrac{3a_{n-1}^2}{(1+a_{n-1})^3 - 1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$, $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = ?$

33. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, одредити $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ако

а) $b_n = \dfrac{1}{n^2}(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n)$

б) $b_n = a_n + \alpha a_{n-1} + \dots + \alpha^{n-1} a_1$, $\alpha \in (0,1)$.

34. $a_n = \dfrac{a \cdot 2^{(-1)^n \cdot n} + n^b}{\ln n + n^4 + 1}$, $b_n = \dfrac{1^{|a|} + 2^{|a|} + \dots + n^{|a|}}{n^{|a|+1}}$

а) Наћи $T(a_n + b_n)$.

б) За које a, b $a_n + b_n$ конвергира?

35. (x_n) монотон низ реалних бројева такав да $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_{n+1}-x_n)=x\in\mathbb{R}$.
Испитати конв низа (x_n).

36. а) Наћи $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{[n\sqrt{2}]}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

б) Нека је $\alpha>0$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ и нека су (p_n) и (q_n) низови природних бројева тд $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=\alpha$. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=\infty$.

37. Испитати конв. низова $x_n=\dfrac{na^n+b^n}{1+a^n}$ и $y_n=\dfrac{1+a^n}{n+b^n}$.

38. Израчунати:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}k\sqrt{k}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot(2x)^n+n^2+\dfrac{2}{(3x)^n}}$, $x>0$

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos 5x)-\ln(\cos 7x)}{x^2}$

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\sin x}-1}{1-\cos x}$

39. Испитати непрекидност фје

а) $f(x)=\begin{cases} x\ln x^2, & x\neq0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$

б) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$

в) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

40. $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидне такве да
$\inf\limits_{0\le x\le1}F(x)=\inf\limits_{0\le x\le1}G(x)$.
Доказати да $\exists\xi\in\mathbb{R}$ тако да $F(\xi)=G(\xi)$.

41. Одредити асимптотски еквив. полином:

а) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$, $x\to0$

б) $f(x)=\operatorname{tg}x-\sin x$, $x\to0$

в) $f(x)=x^x-1$, $x\to1$

42. Доказати $(x+o(x))^n=x^n+o(x^n)$, $x\to0$.

43. а) Доказати ако је f 1-1 и непрекидна на (a,b) онда је f строго монотона на (a,b).

б) Да ли постоји непр фја $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тако да $(f\circ f)(x)=e^{-x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$?

44. $f\in C[0,2] \overset{?}{\Rightarrow} \exists c\in[0,1] \; : \; f(c+1)-f(c)=\frac{1}{2}\left(f(2)-f(0)\right)$

45. $f\in C(\mathbb{R})$, $f(f(7))=7 \overset{?}{\Rightarrow} \exists c\in\mathbb{R}$ $f(c)=c$.

46. Наћи све $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидне тако да $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

47. Наћи све $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидне тако да $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)+f(\frac{2}{3}x)=x$.

48. Наћи све $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидне тако да $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=f(2x)$.

49. Испитати равн непр фје f

а) $f(x)=\dfrac{\sin(\ln(1+x))}{x}$ на $(0,\infty)$

б) $f(x)=\sqrt{|x|}\,e^{-x}$ на $(0,\infty)$

в) $f(x)=\sqrt{|x|}\,e^{-x}$ на $(-\infty,0)$

г) $f(x)=\sin x^2$ на $(0,+\infty)$

50. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна и периодична $\overset{?}{\Rightarrow}$ f равн непр на $\mathbb{R}$.

51. Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

а) $$a_n=\frac{\operatorname{arctg} n^{\alpha}-\frac{\pi}{2}\cosh\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\left(\frac{n^3+2}{n^3+3}\right)^3-\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n+2}}}{n^{\beta}},\quad \alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R}$$

$$\cosh x:=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sinh x:=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

б) $$a_n=\frac{\left(\arcsin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}\right)(n+3)^{3/2}}{\left((\cos\frac{1}{n})^{\sin\frac{1}{n^2}}-(1+\frac{1}{n^3})^{\beta}\right)\sqrt{n}},\quad \beta\in\mathbb{R}$$

в) $$a_n=n^3\left(\sin\frac{1}{n}\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

в.1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot a_1+\dots+n\cdot a_n}{n^2}$$

52. Одредити $a, b, c \in \mathbb{R}$ тд је f диференцијабилна (ако они постоје),

а)
$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+3x^2), & x \le -1 \\ ax^2 + bx + c, & -1 < x \le 0 \\ \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

Испитати и равн непр ф-је f

б)
$$f(x) = \begin{cases} a\,\dfrac{\sqrt{\sin x^2 - x^3}}{x^6}, & x < 0 \\ c, & x = 0 \\ x^{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Да ли је f 1-1?

в)
$$f(x) = \begin{cases} ax + \sqrt[3]{2x-1}, & x \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right] \\ c \cdot \arcsin \dfrac{2}{2x+3}, & x \notin \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right] \end{cases}$$

Да ли је f равн непр?

53. $f \in C^1[a,b]$ и $\exists c \in (a,b)$ $f'(c) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a,b)$ $f(\xi) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$

54. $f \in C[0,2] \cap D(0,2)$, $f(0) = f(2) = M > 0$, $|f'(x)| \le M$ $\forall x \in (0,2) \overset{?}{\Rightarrow} f(x) \ge 0$ $\forall x \in [0,2]$

55. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференцијабилна, $0 < a < b \overset{?}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a,b)$ $\dfrac{b-a}{2} \dfrac{f'(\xi)}{\xi} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b+a}$