37. $x_n = \dfrac{na^n + b^n}{1+a^n}$ испитати конв у зависности од a и b.

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \text{не постоји}, & a \le -1 \\ 0, & |a|<1 \\ 1, & a=1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1+a^n = \begin{cases} \text{не постоји} & a\le -1 \\ 1 & |a|<1 \\ 2 & a=1 \\ +\infty & a>1 \end{cases}$$

$n^k < c^n$, $n\to\infty$, $c>1$

$$\lim_{n\to\infty} na^n = \begin{cases} \text{не постоји}, & a\le -1 \\ 0, & |a|<1 \\ +\infty, & a\ge 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow a = \frac{1}{c}$, $|c|>1$ $\quad \frac{n}{c^n} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na^n+b^n}{1+a^n} = \begin{cases} \text{не знамо}, & a\le -1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b^n, & |a|<1 \\ +\infty, & a=1,\ b>-1 \\ \text{не знамо}, & a=1,\ b\le -1 \\ \text{не знамо}, & a>1 \end{cases}$$

1° $a\le -1$ или $b\le -1$

$$x_n = \frac{na^n+b^n}{1+a^n} : \frac{a^n}{a^n} = \frac{n+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{\left(\frac{1}{a}\right)^n+1}$$

$a=(-1) \Rightarrow$ за n-непарно x_n није добро дефинисан јер $x_n = \dfrac{---}{0}$.

$a<-1 \Leftrightarrow |a|>1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n = \begin{cases} +\infty, & b<a<-1 \\ 0, & a<b<|a| \\ 1, & b=a \\ \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n & b=|a|=-a \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{b}{a}\right]^n & b>-a \end{cases}$$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}_{0}} =$

$$= \begin{cases} +\infty & b<a<-1 \\ +\infty & b\in(a,|a|) \\ +\infty & b=a \\ +\infty & b=-a \\ \text{дивергира} & b>-a \end{cases}$$

$\Big\}\ b\le -a$

$c=\frac{b}{a}<-1 \Rightarrow |c|>1 \quad \frac{n}{c^n}\to 0$

$n < c^n$

$\frac{c^n}{n} \xrightarrow{n\ \text{парно}} +\infty$

$\frac{c^n}{n} \xrightarrow{n\ \text{непарно}} -\infty$

$\Big\} \Rightarrow n+c^n \sim c^n$

$a=1$, $b\le -1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+b^n}{2} = \begin{cases} +\infty, & b=-1 \\ \text{дивергира}, & b<-1 \end{cases}$$

иста ситуација

$a>1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na^n+b^n}{1+a^n} \begin{matrix} :a^n \\ :a^n \end{matrix} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{\left(\frac{1}{a}\right)^n+1} = \begin{cases} \text{дивергира}, & \frac{b}{a}<-1 \\ +\infty, & \frac{b}{a}=-1 \\ +\infty & \left|\frac{b}{a}\right|<1 \\ +\infty & \left|\frac{b}{a}\right|\geq 1 \end{cases} \quad \frac{b}{a}\geq -1$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & a>1,\ b\geq -a;\quad a=1,\ b\leq -1;\ a<-1,\ b\leq -a;\ |a|\leq 1,\ b>1 \\ \text{дивергира}, & a>1,\ b<-a;\quad a=1,\ b<-1;\ a<-1,\ b>-a;\ |a|<1,\ b\leq -1 \\ 1, & |a|<1,\ b=1 \\ 0, & |a|<1,\ |b|<1. \end{cases}$$

39.

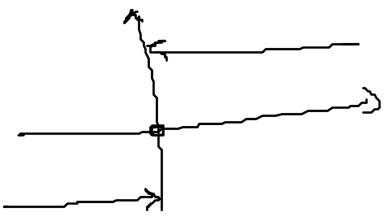
б) $$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}\cdot\frac{n^x}{n^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2x\ln n}-1}{e^{2x\ln n}+1}=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

$x=0$ $\quad e^{2x\ln n}=e^0=1$

$x>0$ $$\frac{e^{2x\ln n}-1}{e^{2x\ln n}+1}\cdot\frac{e^{-2x\ln n}}{e^{-2x\ln n}}=\frac{1-e^{-2x\ln n}}{1+e^{-2x\ln n}}\to\frac{1}{1}$$

$$-2x\ln n \to -\infty, \quad e^{-2x\ln n}\to 0$$

$x<0$



f је непрекидна на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

f има прекид II врсте у 0 јер $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$.