41. a) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$, $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

$\sqrt{x+1}\sim 1+\frac{1}{2}x+\vartheta(x)$, $x\to 0$

$\sqrt{1-x}\sim 1+\frac{1}{2}(-x)+\underset{\underset{\vartheta(x)}{\shortparallel}}{\vartheta(-x)}$, $x\to 0$

$f(x)\sim \cancel{1}+\frac{1}{2}x+\vartheta(x)-\cancel{1}-\frac{1}{2}(-x)-\vartheta(x)=\underline{\underline{x+\vartheta(x)}}$, $x\to 0$.

39. a)

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x^2, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$$

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ⇝ $x\cdot\ln x^2$ непрекидна на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

f непр у $x=0$?

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x^2=?$ $0\cdot(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot\ln x^2=?$

$x^2>0$

$x^2=e^t$, $t\in\mathbb{R}$

$x\to 0$, $x^2\to 0$ $\Rightarrow$ $t\to -\infty$

$t=-u$

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x^2=\lim_{t\to-\infty}e^{t/2}\cdot\ln e^t=\lim_{t\to-\infty}e^{t/2}\cdot t=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t/2}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-u}{e^{u/2}}=0$$

$\frac{n}{c^n}\underset{n\to\infty}{\to}0$, $c>1$, $n\ll c^n$ $\quad x\ll c^x$, $x\to+\infty$

$u\ll(\underbrace{e^{1/2}}_{\substack{\vee\\1}})^x$, $x\to\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}x\cdot\ln x^2=0$

f је непр. у 0 ако $\alpha=0$

f има прекид I врсте ако $\alpha\neq 0$.

38.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\sin x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x\ln(1+x)}-1}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x+o(x))(x+o(x))}-1}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+\underbrace{x\cdot o(x)}_{=o(x^2)}+\underbrace{o(x)\cdot x}_{=o(x^2)}+\underbrace{o(x)\cdot o(x)}_{=o(x^2)}}-1}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=*$$

$\sin x=x+o(x)$, $x\to 0$

$1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$, $x\to 0$ $\qquad \frac{1-\cos x}{x^2}\to\frac{1}{2}$, $x\to 0$

$\ln(1+x)=x+o(x)$, $x\to 0$

$$*=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+o(x^2)}-1}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=$$

$e^t=1+t+o(t)$, $t\to 0$, $t=x^2+o(x^2)$ $\;=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x^2+o(x^2)+\underbrace{o(x^2+o(x^2))}_{=o(x^2)}-\cancel{1}}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)\ :x^2}{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\ :x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+o(1)^{\to 0}}{\frac{1}{2}+o(1)_{\to 0}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2.$$

37. $y_n=\dfrac{1+a^n}{n+b^n}$, $a,b\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}b^n=\begin{cases}0, & |b|<1\\ 1, & b=1\\ +\infty, & b>1\\ \text{не постоји}, & b\le -1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}n+b^n=\begin{cases}+\infty, & |b|<1,\ b=1,\ b>1,\ b=-1, \quad b\ge -1\\ \text{не постоји} & b<-1\end{cases}$$

$b<-1$:

$n+b^n$ $\qquad \frac{n}{b^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $b>1$

$(-1)^n\frac{n}{b^n}\to 0$, $b>1$ $\quad\Rightarrow\quad \frac{n}{b^n}\to 0$, $|b|>1$

$n=o(b^n)$, $n\to+\infty$

$x=o(b^x)$, $x\to+\infty$

$n+b^n=o(b^n)+b^n\sim b^n$, $b<-1$

$$\lim_{n\to\infty}1+a^n=\begin{cases}+\infty, & a>1\\ 1, & |a|<1\\ 2, & a=1\\ \text{не постоји} & a\le -1.\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+b^n} = \begin{cases} 0, & b \ge -1,\ |a|<1,\ a=1,\ a=-1 \\ \text{не знамо}, & \text{иначе} \end{cases}$$

1° $b \ge -1$ и $|a| > 1$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+b^n}\ \frac{:a^n}{:a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}^{\to 0} + 1}{\underbrace{\frac{n}{a^n}}_{0} + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = \begin{cases} \text{зависи од знака } \frac{n}{a^n}+\frac{b^n}{a^n}, & \left|\frac{b}{a}\right| < 1 \ (*) \\ 1, & \frac{b}{a} = 1 \\ 0, & \frac{b}{a} < -1 \\ \text{дивергира}, & \frac{b}{a} = -1 \\ 0, & \frac{b}{a} > 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$$

$$\frac{n}{a^n} + \frac{b^n}{a^n} = \frac{\overbrace{n+b^n}^{o(b^n)}}{a^n} = \frac{b^n + o(b^n)}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n + o\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

(*) $\longrightarrow$ $\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$\left|\frac{b}{a}\right| < 1$

$\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{0\cdot(-1)^n} \Rightarrow \lim y_n$ не постоји

$b < -1$: $\frac{n}{b^n} \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{n+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{b^n + o(b^n)} = \text{"}0 \cdot \lim_{n\to\infty} 1+a^n\text{"} = \begin{cases} 0, & |a|<1 \\ 0, & a=1 \\ 0, & a=-1 \\ \text{не знамо}, & |a|>1. \end{cases}$$

b^n: $+\infty$ n парно, $-\infty$ n непарно

$|a|>1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a^n}{b^n + o(b^n)}\ \frac{:a^n}{:a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^n}^{\to 0} + 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n + o\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \begin{cases} 1, & \frac{b}{a} = 1 \\ \text{не постоји}, & \frac{b}{a} = -1 \\ +\infty, & 0 < \frac{b}{a} < 1 \\ \text{не постоји}, & 0 > \frac{b}{a} > -1 \\ 0, & \frac{b}{a} < -1,\ \frac{b}{a} > -1 \end{cases}$$