(13) $$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3} \qquad (*)$$

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = a\cdot\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} = a\cdot\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\right) = a\left(1-b\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right) =$$

$$= a - ab\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

$$\Rightarrow (*) \iff a+b+c-ab\cdot\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}-bc\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}-ac\frac{c+a}{c^2+ac+a^2} \overset{?}{\geq} \frac{a+b+c}{3}$$

$$\iff \frac{2}{3}(a+b+c) \overset{?}{\geq} \frac{ab}{a^2+ab+b^2}(a+b)+\frac{bc}{b^2+bc+c^2}(b+c)+\frac{ac}{a^2+ac+c^2}(c+a)$$

$\frac{ab}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{1}{3}$ јер $3ab \leq a^2+ab+b^2$, тј $(b-a)^2 \geq 0$ ✓

$$\Rightarrow \frac{ab}{a^2+ab+b^2}(a+b)+\frac{bc}{b^2+bc+c^2}(b+c)+\frac{ac}{a^2+ac+c^2}(a+c) \leq \frac{1}{3}(a+b)+\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}(c+a)=\frac{2(a+b+c)}{3}$$

(18) $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2) \iff x_1<x_2 \vee (x_1=x_2 \quad y_1\leq y_2)$

ρ је релација поретка?

(Р) $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_1,y_1)$?

$x_1=x_1$ и $y_1\leq y_1 \Rightarrow (x_1,y_1)\,\rho\,(x_1,y_1)$

(АС) $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1) \overset{?}{\Rightarrow} (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$

Ако $x_1\neq x_2$ онда из $(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2) \Rightarrow x_1<x_2 \Rightarrow (x_2,y_2)\,\not\rho\,(x_1,y_1)$ јер не важи $x_2<x_1 \vee (x_2=x_1 \wedge y_2\leq y_1)$

Дакле, $x_1=x_2$.

$$\left.\begin{array}{l}(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2),\ x_1=x_2 \Rightarrow y_1\leq y_2\\ (x_2,y_2)\,\rho\,(x_1,y_1),\ x_1=x_2 \Rightarrow y_2\leq y_1\end{array}\right\} \Rightarrow y_1=y_2.$$

(Т) $\underbrace{(x_1,y_1)\,\rho\,(x_2,y_2)}_{\Downarrow} \wedge \underbrace{(x_2,y_2)\,\rho\,(x_3,y_3)}_{\Downarrow} \overset{?}{\Rightarrow} (x_1,y_1)\,\rho\,(x_3,y_3)$

(1): $x_1<x_2 \vee (x_1=x_2 \wedge y_1\leq y_2)$ (2): $x_2<x_3 \vee (x_2=x_3 \wedge y_2\leq y_3)$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$x_1 \leq x_2$ $\qquad\qquad\qquad$ $x_2 \leq x_3$

Дакле, $x_1 \leq x_3$.

Ако $x_1 < x_3$, онда $(x_1, y_1)\, \rho\, (x_3, y_3)$.

Ако $x_1 = x_3$ онда мора да важи $x_1 = x_2 = x_3$.

из (1) важи $y_1 \leq y_2$, а из (2) $y_2 \leq y_3$.

Дакле, $y_1 \leq y_3$, одакле $(x_1, y_1)\, \rho\, (x_3, y_3)$.

$\Rightarrow$ ρ је рел. поретка на $\mathbb{R}^2$.

$A = [0,1) \times [0,1)$

$\sup_\rho A = ?$

$\inf_\rho A = ?$

$\inf_\rho A = (0,0)$? $\quad$ $\sup_\rho A = (1,1)$?

$\inf_\rho A = (0,0)$: $\quad (x,y) \in A \qquad ?\ (0,0)\, \rho\, (x,y)\ ?$

$x \in [0,1) \Rightarrow 0 \leq x$

$y \in [0,1) \Rightarrow 0 \leq y$ $\qquad \Rightarrow (0,0)\, \rho\, (x,y)$ ✓

$(0,0) \in A$

$\Rightarrow \inf_\rho A = \min_\rho A = (0,0)$.

$\sup_\rho A = (1,1)$: $\quad (x,y) \in A \qquad ?\ (x,y)\, \rho\, (1,1)\ ?$

$x \in [0,1) \Rightarrow x < 1 \Rightarrow (x,y)\, \rho\, (1,1)$

$\Rightarrow$ $(1,1)$ горње огран.

(a,b) горње огран скупа A онда

$x \in [0,1) \Rightarrow x \leq a \Rightarrow \underline{a \geq 1}$

Ако $a = 1$, $x < 1 \Rightarrow (x,y)\, \rho\, (a,b)$ за $b \in \mathbb{R}$ било које.

Такође, $(1,1)\, \rho\, (a,b)$ акко $b \geq 1$

Одакле закључујемо да $(1,1)$ није $\sup_\rho A$

и за било које (a,b) горње огран скупа A

$(a, b-1)\, \rho\, (a,b)$ и $(a, b-1)$ је горње огран. овог скупа.

$\Rightarrow$ НЕ ПОСТОЈИ СУПРЕМУМ СКУПА A У ОДНОСУ НА ρ!