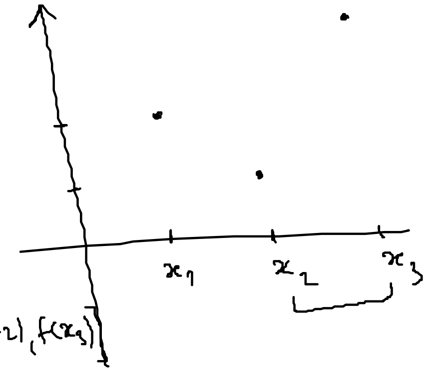
43. а) f 1-1 и непр на (a,b) $\overset{?}{\Rightarrow}$ f монотона на (a,b)

ППС. $\Rightarrow \exists\, x_1 < x_2 < x_3$

$f(x_1) > f(x_2)$ и $f(x_2) < f(x_3)$



БУО, $f(x_1) \le f(x_3)$.

"=" не може јер онда f није 1-1

$f(x_1) < f(x_3)$

$f\big|_{[x_2,x_3]} \overset{\text{Коши-Болцано}}{\Rightarrow}$ $C = f(x_1)$, $C \in [f(x_2), f(x_3)]$

$\Rightarrow \exists\, c \in [x_2, x_3]$: $f(c) = C = f(x_1)$

$\Rightarrow f$ није 1-1 ↯

$\Rightarrow f$ мора бити монотона.

б) Да ли $\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непр тд $f \circ f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$?

$g(x) = e^{-x}$ $\downarrow$, 1-1, непр.

$f \circ f(x) = e^{-x}$

f 1-1? ПП. $\exists\, x_1, x_2$ $x_1 \ne x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow f\circ f(x_1) = f \circ f(x_2)$

$f(f(x_1)) = f(f(x_2))$

$e^{-x_1} = e^{-x_2}$ ↯

$\Rightarrow f$ 1-1, непрекидна $\overset{а)}{\Rightarrow} f$ монотона

1° f строго растућа $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f\circ f(x_1) < f \circ f(x_2)$

$f(f(x_1)) < f(f(x_2))$

$e^{-x_1} < e^{-x_2}$ ↯ $e^{-x}\downarrow$

$\Rightarrow f$ није растућа

2° f строго опадајућа : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2))$

$e^{-x_1} < e^{-x_2}$ ↯ $e^{-x}\downarrow$

$\Rightarrow f$ није опадајућа

$\Rightarrow f$ не постоји.

48. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна $f(x) = f(2x)$.

$f = ?$

$f(x) = f(2x) = f(2\cdot 2x) = f(2^2 x) = f(2^3 x) = f(2^4 x) = \dots$

$\parallel$

$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2^2}x\right) = f\left(\frac{1}{2^3}x\right) = \dots$

$f(x) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n)$

$x_n:\quad x_0 = x$

$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}$

ПМИ: $x_n = \frac{1}{2^n}\cdot x$ .... → за вежбу

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot x = 0 \underset{f\text{ непр.}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

$f(x) = f(0) \Rightarrow f = \text{const}.$

49. б) $f(x) = \sqrt{|x|}\,e^{-x}$ $x\in(-\infty,0)$ равн непр ?

$x, y\in(-\infty,0)$

$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{|x|}\,e^{-x} - \sqrt{|y|}\,e^{-y}| = |\sqrt{|x|}\,e^{-x} - \sqrt{|y|}\,e^{-x} + \sqrt{|y|}\,e^{-x} - \sqrt{|y|}\,e^{-y}|$

$\le |\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}|\cdot \underbrace{e^{-x}}_{\xrightarrow{x\to-\infty} +\infty} + \sqrt{|y|}\,\underbrace{|e^{-x}-e^{-y}|}_{\sqrt{y}\,e^{-y}|e^{-x+y}-1|}$

$\Rightarrow$ највероватније f није равн непр.

$x_n, y_n = ?$ $\quad x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad f(x_n)-f(y_n) \ge \text{const} > 0$.

$x_n < y_n < 0$ $\quad 0 < f(x_n)-f(y_n) = \sqrt{|x_n|}\,e^{-x_n} - \sqrt{|y_n|}\,e^{-y_n}$

$-x_n > -y_n > 0$ $\quad = (\sqrt{|x_n|}-\sqrt{|y_n|})e^{-x_n} + \sqrt{|y_n|}\,(\underbrace{e^{-x_n}-e^{-y_n}}_{\ge 0})$

$y_n = -n^2$

$x_n = -n^2 - \frac{1}{n}$

$x_n - y_n = -\frac{1}{n} \to 0$ ✓

$(\sqrt{|x_n|}-\sqrt{|y_n|})\,e^{-x_n} = \left(\sqrt{n^2+\frac{1}{n}} - n\right)e^{n^2+\frac{1}{n}}$

$= n\cdot\Big(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}-1}_{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)}\Big)e^{n^2+\frac{1}{n}} \sim \left(\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot n\,e^{n^2+\frac{1}{n}} = \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{n}}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)e^{n^2}}{2n^2}}_{\xrightarrow{n\to\infty}+\infty}$

$(\sqrt{|x_n|}-\sqrt{|y_n|})\,e^{-x_n} \ge 1.$

за $n\ge n_0$

$$f(x_n) - f(y_n) \ge \left(\sqrt{|x_n|} - \sqrt{|y_n|}\right) e^{-x_n} \underset{n \ge n_0}{\ge} 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists\, x_n, y_n \in (-\infty, 0) \\ \quad x_n - y_n \to 0 \\ \quad f(x_n) - f(y_n) \ge 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ није равн непр на } (-\infty, 0).$$