X, ρ-поретка на X, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

$x \in X$ супремум скупа A ако $(\forall a \in A)\ a \rho x$ и $(\forall y \in X)((\forall a \in A)\ a \rho y \Rightarrow x \rho y)$.

$x \in X$ инфимум —||— $(\forall a \in A)\ x \rho a$ и $(\forall y \in X)((\forall a \in A\ y \rho a \Rightarrow y \rho x)$

① $Y \neq \emptyset$, $\mathcal{X} = \mathcal{P}(Y)$, $\subseteq$ рел. поретка на $\mathcal{X}$.

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{A}$ је скуп неких подскупова од Y, $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I,\ A_i \subseteq Y\}$

$\sup \mathcal{A} = ?$, $\inf \mathcal{A} = ?$

пр. $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{b\}, \{b,c\}\}$ $\quad \inf \mathcal{A} = ?$

$\inf \mathcal{A} = B \Rightarrow B \subseteq \{a\},\ B \subseteq \{b\},\ B \subseteq \{b,c\} \Rightarrow \underline{B = \emptyset}$

$\inf \mathcal{A} = \emptyset$

$\sup \mathcal{A} = C \Rightarrow \{a\} \subseteq C,\ \{b\} \subseteq C,\ \{b,c\} \subseteq C \Rightarrow \{a,b,c\} \subseteq C$

$C = \{a,b,c\}$

$\sup \mathcal{A} = \{a,b,c\}$

$\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\} \Rightarrow \inf \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i$, $\sup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$.

② $X = \mathbb{N}$, $\rho =$ "$|$" дељивост на $\mathbb{N}$.

$A_1 = \{5,6,7,10\}$ $\quad \inf A_1 = x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \mid a,\ a \in A_1 \Rightarrow x \mid \underbrace{нзд\{5,6,7,10\}}_{=1}$

$x \mid 1$

$\Rightarrow x = 1$

$\inf A_1 = 1$

$\sup A_1 = x \Rightarrow a \mid x,\ a \in A_1 \Rightarrow нзс\{5,6,7,10\} \mid x$

$x = нзс\{5,6,7,10\} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{210}$

$A_2 = \{8, 10, 14, 560\}$ $\quad \inf A_2 = 2 \notin A_2 \Rightarrow \nexists \min A_2$

$\sup A_2 = 560 \in A_2 \Rightarrow \max A_2$

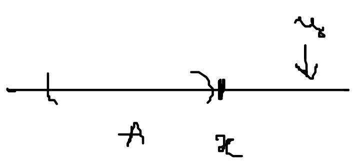
* $X = \mathbb{R}$, $\rho =$ "$\leq$", $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

$x = \sup A$ ако $\boxed{1)\ (\forall a \in A)\ a \leq x}$

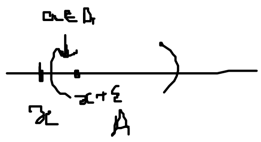
2) $(\forall y \in X)((\forall a \in A)\ a \leq y \Rightarrow x \leq y)$

$\Updownarrow$

$\boxed{2)\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\ x - \varepsilon < a}$



$x = \inf A$ акко 1) $(\forall a\in A)\ x \le a$



2) $(\forall \varepsilon>0)(\exists a\in A)\ x+\varepsilon > a$.

<u>Пример</u>: $X=\mathbb{R}$, $\rho =$ „$\le$"

$A_1 = [-\pi,-1)\cup(2,5)$ $\qquad \inf A_1 = -\pi$?

$\qquad \sup A_1 = 5$?

$\inf A_1 = -\pi$: $\forall a\in A$ $\quad -\pi \le a$ ✓

$\varepsilon>0$ произвољно $\quad -\pi+\varepsilon > \overset{\in A_1}{\underline{\underline{-\pi}}}$ ✓

$-\pi\in A_1 \quad \Rightarrow \inf A_1 = \min A_1$

$\sup A_1 = 5$: $\quad \forall a\in A \quad a\le 5$ ✓

$\varepsilon>0$ произвољно $\quad$? $\exists a\in A_1$: $\quad 5-\varepsilon < a$

$a = 5 - \varepsilon/2 < 5-\varepsilon$ ✓

ако $\quad 5-\varepsilon/2 > 2 \quad$ иначе $\quad a=3$

$A_2 = [0,+\infty)\cap\mathbb{Q}$

$\inf A_2 = 0\in A_2 \Rightarrow \min A_2 = 0$.

$\sup A_2$ „$=+\infty$" $\notin\mathbb{R} \Rightarrow$ не постоји $\sup A_2$.

* Принцип супремума: $X=\mathbb{R}$, $\rho=$ „$\le$"

$\emptyset\ne A\subseteq\mathbb{R}$, A ограничен одозго $\Rightarrow \exists \sup A \in\mathbb{R}$

ограничен одоздо $\Rightarrow \exists \inf A \in\mathbb{R}$

A није ограничен одозго $\Rightarrow \sup A\notin\mathbb{R}$ (не постоји sup у $\mathbb{R}$)

није огран одоздо $\Rightarrow \nexists \inf A\in\mathbb{R}$.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ $\left(\begin{array}{l}\sup\emptyset := -\infty\\ \inf\emptyset := +\infty\end{array} \rightarrow \text{и у } \mathbb{R}\right)$

Особине: $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$

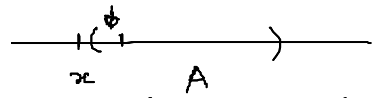
1° $\sup A+B = \sup A + \sup B$, $A+B = \{a+b \mid a\in A, b\in B\}$

$\inf A+B = \inf A + \inf B$

- - - -

Δ: $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$?

$x=\inf A$, $y = \inf B$ $\Rightarrow$ $\forall a\in A$ $x\le a$ и $\forall \varepsilon>0\ \exists a_\varepsilon \in A$ $x+\varepsilon > a_\varepsilon$



$\forall b\in B$ $y \le b$ и $\forall\varepsilon>0\ \exists b_\varepsilon\in B$ $y+\varepsilon > b_\varepsilon$

Нека је $c\in A+B$ произвољно. $\Rightarrow$ $\exists a\in A$ и $\exists b\in B$ $c=a+b$.

$\Rightarrow c = a+b \ge x+y$

$\Rightarrow x+y$ доње ограничење за $A+B$

Нека је $\varepsilon>0$ произвољно. Да ли постоји $c_\varepsilon\in A+B$ тд $x+y+\varepsilon > c_\varepsilon$?

$\varepsilon/2>0 \Rightarrow \exists a_{\varepsilon/2}\in A$ $x+\varepsilon/2 > a_{\varepsilon/2}$

$\varepsilon/2>0 \Rightarrow \exists b_{\varepsilon/2}\in B$ $y+\varepsilon/2 > b_{\varepsilon/2}$

$\Rightarrow x+y+\varepsilon > \overbrace{a_{\varepsilon/2}+b_{\varepsilon/2}}^{\in A+B} =: c_\varepsilon$.

$\Rightarrow \inf A+B = x+y = \inf A + \inf B$. □

2° $\sup(-A) = -\inf A$ $-A := \{-a \mid a\in A\}$

$\inf(-A) = -\sup A$

- - - -

Δ: $\sup(-A) = -\inf A$:

$\inf A = x$? $\sup(-A) = -x$?

↓

$\forall a\in A$ $x\le a$ $/\cdot(-1)$ $\Rightarrow$ $\forall a\in A$ $-x\ge -a$

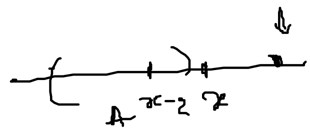
и $\forall\varepsilon>0\ \exists a_\varepsilon\in A$ $x+\varepsilon > a_\varepsilon$ $/\cdot(-1)$ $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists a_\varepsilon\in A$ $(-x)-\varepsilon < -a_\varepsilon$ } $\Rightarrow \sup(-A) = -x$ ✓

□

3° $A,B\subseteq(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ $\sup A\cdot B = \sup A\cdot\sup B$, $A\cdot B = \{a\cdot b \mid a\in A, b\in B\}$

Δ: $\sup A = x>0$, $\sup B = y>0$ → $\forall a\in A$ $a\le x$ $\forall b\in B$ $b\le y$

? $\sup(AB) = x\cdot y$? $\forall c\in A\cdot B$: $c = a\cdot b\le x\cdot y$ ✓



$\varepsilon>0$ произвољно $c_\varepsilon\in A\cdot B = ?$ $c > x\cdot \underline{\underline{y-\varepsilon}}$?

$\sup A = x \Rightarrow \forall\varepsilon_1>0\ \exists a_{\varepsilon_1}\in A$ $a_{\varepsilon_1} > x-\varepsilon_1$

$\sup B = y \Rightarrow \forall\varepsilon_2>0\ \exists b_{\varepsilon_2}\in B$ $b_{\varepsilon_2} > y-\varepsilon_2$

$\underbrace{a_{\varepsilon_1}\cdot b_{\varepsilon_2}}_{c_\varepsilon} > (x-\varepsilon_1)\cdot(y-\varepsilon_2) = x\cdot y \underbrace{-\varepsilon_1 x - \varepsilon_2 y + \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}_{\ge -\varepsilon \quad \varepsilon_1,\varepsilon_2 = ?}$

Хоћемо да нађемо ε_1 и $\varepsilon_2 > 0$ (зависе од x, y, ε) тд

$-\varepsilon_1 y - \varepsilon_2 x + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \geq -\varepsilon$! (*)

$\varepsilon_1 = \, ?$
$\varepsilon_2 = \, ?$

$$-\varepsilon_1 y - \varepsilon_2 x + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \geq -\varepsilon$$

$$-\varepsilon_1 \cdot (y - \varepsilon_2) \geq -\varepsilon + \varepsilon_2 \cdot x \quad / \cdot (-1)$$

$$\varepsilon_1 (y - \varepsilon_2) \leq \varepsilon - \varepsilon_2 \cdot x \quad \rightarrow \quad \varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon - \varepsilon_2 \cdot x}{y - \varepsilon_2}$$

ε_2 бирамо тако да $\varepsilon_2 < \min\{\frac{\varepsilon}{x}, y\}$

$$0 < \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\min\{\frac{\varepsilon}{x}, y\} < \underbrace{\min\{\frac{\varepsilon}{x}, y\}}_{>0}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_2 \cdot x}{y - \varepsilon_2}\right) > 0$$

за овакве ε_1 и ε_2 важи неједнакост (*)

$$\Rightarrow c_\varepsilon = a_{\varepsilon_1} \cdot b_{\varepsilon_2} > (x - \varepsilon_1)(y - \varepsilon_2) \geq xy - \varepsilon .$$

□

1. $A = \{ \frac{m}{n} \mid m \leq n, \ m, n \in \mathbb{N} \}$

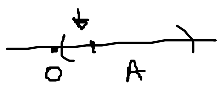
$\sup A, \inf A, \min A, \max A = \, ?$

$\inf A = \, ?$ $\quad \inf A = 0 \, ?$

$\sup A = 1 \, ?$

$\inf A = 0$: $\quad \forall m, n \in \mathbb{N} \ m < n \Rightarrow \frac{m}{n} \geq 0$ ✓

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m, n \in \mathbb{N} \ m < n : \frac{m}{n} < 0 + \varepsilon$:



$\varepsilon > 0$ произвољно $\quad m = 1 \quad ? \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon \, ?$

Хоћемо да нађемо такво n!

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$$ ✓

$\sup A = 1$: $\quad m \leq n \Rightarrow \frac{m}{n} \leq 1$ ✓

$m = n \Rightarrow \frac{n}{n} = 1 \in A \Rightarrow \max A = 1 = \sup A .$