* Јенсенова неједнакост :

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна

$x_1,\dots,x_n \in (a,b)$ $\quad f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}$

- - -

$f(x)=x^k,\ k\in\mathbb{N}$ $\quad f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ конвексна

Јенсен $\Rightarrow$ $x_1,\dots,x_n \in [0,+\infty)$ $\quad \left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right)^k \le \frac{x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k}{n} \ \Big/ \sqrt[k]{\ }$

$$\boxed{\underbrace{\frac{x_1+\dots+x_n}{n}}_{A_n} \le \underbrace{\sqrt[k]{\frac{x_1^k+\dots+x_n^k}{n}}}_{M_n^k}}$$

за $k=2$ $\quad M_n^2 = K_n$ - квадратна средина

$M_n^{k_1} \le M_n^{k_2} \quad k_1 \le k_2$

Зашто $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$?

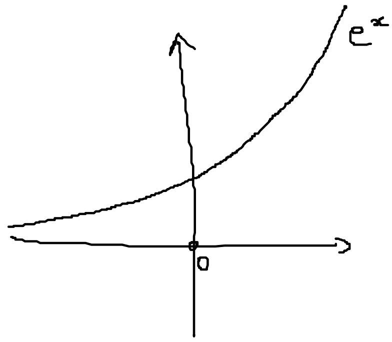
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad \ln$ - конкавна

e^x - конвексна $\quad e^{x_1+x_2} = e^{x_1}\cdot e^{x_2}$

$f(x)=e^x$ конвексна на $\mathbb{R}$

$y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$ $\quad$ Јенсен $\Rightarrow$ $\quad e^{\frac{y_1+\dots+y_n}{n}} \le \frac{e^{y_1}+\dots+e^{y_n}}{n}$

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $\quad \sqrt[n]{e^{y_1}\cdot e^{y_2}\cdots e^{y_n}} \le \frac{e^{y_1}+\dots+e^{y_n}}{n}$



$x_1,\dots,x_n \in (0,+\infty) \Rightarrow y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$ $\quad e^{y_k}=x_k$, $\ y_k = \ln x_k$

$$\sqrt[n]{e^{y_1}e^{y_2}\cdots e^{y_n}} = \underbrace{\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}}_{G_n} \le \underbrace{\frac{x_1+\dots+x_n}{n}}_{A_n}$$

$H_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}$, $\quad H_n \le G_n \to$ покушати за домаћи

$$\boxed{H_n \le G_n \le A_n \le M_n^k}$$

* Коши-Шварцова неједнакост

$a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R} \Rightarrow (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2$

и „=" акко $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots = \frac{b_n}{a_n}$

Δ: 1° Матем. индукција $\to$ за вежбу

2° начин

x променљива

$$(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\dots+(a_nx+b_n)^2 \geq 0$$

$$f(x)=\underbrace{(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)}_{A}x^2+\underbrace{2(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)}_{B}x+\underbrace{(b_1^2+\dots+b_n^2)}_{C}\geq 0$$

$$f(x)\geq 0 \Rightarrow D\leq 0 \rightarrow D=B^2-4AC=4(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2)\leq 0 \Big/ :4$$

$$\Rightarrow (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2)$$

„=" акко је $D=0$ акко $\exists! x_0$ тд $f(x_0)=0$ акко

$$\left.\begin{matrix} a_1x_0+b_1=0 \rightarrow x_0=-\frac{b_1}{a_1} \\ a_2x_0+b_2=0 \quad x_0=-\frac{b_2}{a_2} \\ \vdots \\ a_nx_0+b_n=0 \quad x_0=-\frac{b_n}{a_n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\dots=\frac{b_n}{a_n}}$$

$\square$

(1) $a,b,c\geq 0$

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2\underbrace{(1+a^2)}_{\geq 2a}\geq 6abc \ ?$$

- - - -

$$\frac{1+a^2}{2}\underset{AG}{\geq}\sqrt{1\cdot a^2}=a$$

$$\frac{1+b^2}{2}\underset{AG}{\geq} b \quad , \quad \frac{1+c^2}{2}\underset{AG}{\geq} c$$

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\geq 2a^2b+2b^2c+2c^2a \underset{\substack{AG \\ A_3\geq G_3}}{\geq} 3\sqrt[3]{2a^2b\cdot 2b^2c\cdot 2c^2a}=3\sqrt[3]{2^3\cdot a^3\cdot b^3c^3}$$

$$=3\cdot 2abc$$

$$=6abc \quad \checkmark$$

(2) $a,b,c>0$

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq a+b+c$$

- - -

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\underset{A_3\geq G_3}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}=3\sqrt[3]{abc}$$

не даје нам тражену неједнакост јер $3\sqrt[3]{abc}\leq a+b+c$

$A_3\geq H_3$?

$$\frac{\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}}{3}\geq\frac{3}{\frac{c}{ab}+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}}=\frac{3}{c^3+a^3+b^3}$$

не може ... ---

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b$$

$$2\frac{ab}{c}+2\frac{bc}{a}+2\frac{ac}{b}=\underbrace{\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)}_{\substack{\geq 2b \\ A-G}}+\underbrace{\left(\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}\right)}_{\substack{\geq 2a \\ AG}}+\underbrace{\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)}_{\geq 2c}\geq 2(a+b+c) \Big/ :2$$

$\checkmark$

(3) $x, y, z > 0$

$$A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

– – –

- $$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \underset{A_3 \geq G_3}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{(y+z)(x+z)(x+y)}}$$ ... тешко да може овако ...

- $A_3 \geq H_3$ ... тешко да може овако ...

- Коши-Шварц

$a_1^2 = \frac{x^2}{y+z} \rightarrow a_1 = \frac{x}{\sqrt{y+z}}$ хоћемо да $a_1 \cdot b_1 = x \Rightarrow b_1 = \sqrt{y+z} \Rightarrow b_1^2 = y+z$

$a_2^2 = \frac{y^2}{x+z} \rightarrow a_2 = \frac{y}{\sqrt{x+z}}$ $a_2 \cdot b_2 = y \Rightarrow b_2 = \sqrt{x+z} \Rightarrow b_2^2 = x+z$

$a_3^2 = \frac{z^2}{x+y}$ $a_3 = \frac{z}{\sqrt{x+y}}$ $a_3 \cdot b_3 = z \Rightarrow b_3 = \sqrt{x+y} \Rightarrow b_3^2 = x+y$

$$\Rightarrow (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$A \cdot 2 \cdot \cancel{(x+y+z)} \geq (x+y+z)^{\cancel{2}} \quad / : \overbrace{x+y+z}^{>0}$$

$$A \geq \frac{x+y+z}{2}$$

(4) $x, y, z > 0$

$$A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

- $a_1^2 = \frac{x}{y+z}$ $a_1 = \sqrt{\frac{x}{y+z}}$ $b_1 = \sqrt{x(y+z)}$

$a_1 \cdot b_1 = x$

$b_1^2 = x \cdot (y+z) = xy + yz$

$a_2 = \sqrt{\frac{y}{x+z}}$ $b_2 = \sqrt{y(x+z)}$

$a_3 = \sqrt{\frac{z}{x+y}}$ $b_3 = \sqrt{z(x+y)}$

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \underset{К-Ш}{\geq} (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$A \cdot (xy + yz + yx + yz + zx + xy) \geq (x+y+z)^2$$

$$A \cdot 2 \cdot (xy + yz + zx) \geq (x+y+z)^2 \overset{?}{\underset{?}{\geq}} 3(xy + yz + zx)$$

? $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$?

$$x^2+y^2+z^2+\cancel{2xy}+\cancel{2yz}+\cancel{2zx} \overset{?}{\geq} \cancel{3}(xy+yz+zx)$$

? $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$? $\quad / \cdot 2$

$$2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(xy+yz+zx) \; ? \qquad \checkmark\checkmark$$

$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{\geq 2xy}+\underbrace{(y^2+z^2)}_{\geq 2yz}+\underbrace{(z^2+x^2)}_{\geq 2zx}$$

$\Rightarrow \quad A \cdot 2(xy+yz+zx) \geq 3\cdot(xy+yz+zx) \quad / : 2(xy+yz+zx)$

$$A \geq \frac{3}{2} \qquad \checkmark$$

• Други начин:

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \; ?$$

$a = y+z$ $\qquad x = \frac{1}{2}(b+c-a)$

$b = x+z \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(a+c-b)$

$c = x+y$ $\qquad z = \frac{1}{2}(a+b-c)$

$$\frac{\frac{1}{2}(b+c-a)}{a}+\frac{\frac{1}{2}(a+c-b)}{b}+\frac{\frac{1}{2}(a+b-c)}{c} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)}_{\underset{A-G}{\geq} 2\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)}_{\geq 2}+\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)}_{\geq 2}-\frac{3}{2} \geq 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2} \qquad \checkmark\checkmark$$

Супремум и инфимум

ρ релација поретка на X, $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$
(Р), (АС), (Т)

За лакше меморисање дефиниција ($\rho =$ „$\leq$")

1) $x \in X$ је мајоранта (горње ограничење) скупа A ако $\forall a \in A$ $\quad a \,\rho\, x$
—||— миноранта (доње ограничење) —||— —— $\forall a \in A$ $\quad x \,\rho\, a$

2) $x \in X$ је максимум скупа A ако x мајоранта и $x \in A$, $\max A = x$
—||— минимум —||— —— x миноранта и $x \in A$ $\quad \min A = x$

3) $x \in X$ је супремум скупа A ако x мајоранта и $\forall y \in X$ мајоранта : $x \,\rho\, y$
$\forall y \in X \; \forall a \in A \;\; a \,\rho\, y, \; a \,\rho\, x \Rightarrow x \,\rho\, y$, $\sup A = x$

—||— инфимум —||— —— x миноранта и $\forall y \in X$ миноранта $y \,\rho\, x$.
$\inf A = x$

Пример: $A = [0,1)$ $\longrightarrow$ $\sup A = 1 \notin A \Rightarrow \nexists \max A$
$\rho =$ „$\leq$" $\qquad \inf A = 0 = \min A$