Математичка индукција

(БИ) $n=1$ $P(1)$ ✓

(ИК) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

① Бернулијева неједнакост $a>-1$, $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$, $n\in\mathbb{N}$.

(БИ) $n=1 \Rightarrow (1+a)^1 = 1+1\cdot a \geq 1+1\cdot a$ ✓✓

(ИК) Претпоставимо да за неко $n\in\mathbb{N}$ $(1+a)^n \geq 1+n\cdot a$

Да ли $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)\cdot a$?

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n\cdot(1+a) \geq (1+n\cdot a)(1+a) = 1+a+na+\underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)a$

$1+(n+1)a = 1+na+a$

На основу принципа мат. индукције $(1+a)^n \geq 1+na$ за свако $n\in\mathbb{N}$.

② $x_1=1$, $x_2=2$, $\forall n\geq 3$ $x_n=(n-1)\cdot(x_{n-1}+x_{n-2})$.

Показати да је $x_n=n!$ за свако $n\in\mathbb{N}$.

(БИ) $n=1 \Rightarrow x_1 = 1! = 1$ ✓

$n=2 \Rightarrow x_2 = 2 = 2\cdot 1 = 2!$ ✓

(ИК) Претпоставимо да је $x_n=n!$ и $x_{n-1}=(n-1)!$ за неко $n\geq 2$

Да ли је $x_{n+1}=(n+1)!$?

$x_{n+1} = n\cdot(x_n+x_{n-1}) = n\cdot(n!+(n-1)!) = n\cdot n! + n\cdot(n-1)! =$

$= n\cdot n! + n! = (n+1)n! = (n+1)!$

На основу П.М.И. $\forall n\in\mathbb{N}$ $x_n=n!$.

* Математичка индукција са кораком k, $k\geq 1$ фиксирано!

(БИ) $P(1), P(2), \dots, P(k)$ ✓

(ИК) $P(n), P(n-1), \dots P(n-(k-1)) \Rightarrow P(n+1)$ ✓ $n\geq k$

③ $a_0=1$, $a_n=\sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_0 = (a_0+a_1+a_2+\dots+a_{n-1})+a_0$, $n\geq 1$

Показати да за свако $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ је $a_n=2^n$.

(БИ) $n=0$ $a_0 = 1 = 2^0$ ✓

(ИК) Претпоставимо $a_k=2^k$, $0\leq k\leq n$ за неко $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Да ли је $a_{n+1}=2^{n+1}$?

$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_0 = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 1 = (1+2^1+2^2+\dots+2^n)+1 = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}+1 = 2^{n+1}$ ✓✓

$$\text{БИ} \Rightarrow \underset{T}{P(1)} \overset{\text{ИК}}{\Rightarrow} \underset{T}{P(2)}$$

$$\underset{T}{P(1), P(2)} \overset{\text{ИК}}{\Rightarrow} \underset{T}{P(3)} \quad \cdots \quad \underbrace{P(1), \ldots, P(n-1)}_{T} \overset{\text{ИК}}{\Rightarrow} \underset{T}{P(n)}$$

* Јачи принцип мат. инд.

(БИ) $P(1)$ ✓

(ИК) $P(1), \ldots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$

4) $q \neq 1 \Rightarrow S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, $n \in \mathbb{N}$

(БИ) $n = 1$

$$S_1 = 1 + q \overset{?}{=} \frac{q^2 - 1}{q - 1} = \frac{\cancel{(q-1)}(q+1)}{\cancel{q-1}} \underset{q \neq 1}{=} q + 1 \quad ✓$$

(ИК) за неко $n \in \mathbb{N}$ $S_n = 1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

Да ли $S_{n+1} = 1 + q + \cdots + q^{n+1} = \dfrac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$?

$$\underbrace{1 + q + \cdots + q^n}_{S_n} + q^{n+1} = S_n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + (q-1) \cdot q^{n+1}}{q - 1} =$$

$$= \frac{\cancel{q^{n+1}} - 1 + q^{n+2} - \cancel{q^{n+1}}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \quad ✓✓$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + q + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}, \ q \neq 1$$

* Регресивна индукција

1° Показујемо да P важи за ~~бесконачно много~~ $n \in \mathbb{N}$.

2° $P(n) \Rightarrow P(n-1)$

$\Rightarrow P(n)$ тачно за свако $n \in \mathbb{N}$.

$P(k)$? $k \in \mathbb{N}$ $\quad 1° \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad N > k \quad P(N)$ тачно

$$P(N) \overset{2°}{\Rightarrow} P(N-1) \overset{2°}{\Rightarrow} P(N-2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P(N - (N-k)) = P(k).$$

⑤ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна ф-ја

деф. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ конвексна (конкавна) ако
$\forall\lambda\in(0,1)\ \forall x_1,x_2\in(a,b)\quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ $(\ge)$

Доказати Јенсенову неједнакост:

$$\forall x_1,x_2,\dots,x_n\in(a,b)\qquad f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}.$$

- - - - - -

Мотивација за корак 1°:

за $n=2$? $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ → ово важи из деф. конвексности за $\lambda=\frac12$, јер $1-\lambda=\frac12$

$n=4$

$$f\Bigg(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{\underbrace{4}_{=2\cdot2}}\Bigg)=f\left(\frac{\overbrace{\frac{x_1+x_2}{2}}^{y_1\,\in(a,b)}+\overbrace{\frac{x_3+x_4}{2}}^{y_2\,\in(a,b)}}{2}\right)\le$$

$$\le\frac{f(y_1)+f(y_2)}{2}=\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2}\le$$

$$\le\frac{\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$$

$n=8,16,\dots$

1° Доказујемо да неједнакост важи за $n=2^k$, $k\in\mathbb{N}$.
Радимо индукцију по k!

(БИ) $k=1\Rightarrow n=2$ ✓✓

(ИК) Претпоставимо да је неједнакост тачна за неко $k\in\mathbb{N}$, тј. $n=2^k$.

Да ли важи за $k+1$, тј. $n=2\cdot2^k$?

Нека су $x_1,x_2,\dots,x_{2^{k+1}}\in(a,b)$ произвољни.

$$f\Bigg(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^{k+1}}}{\underbrace{2^{k+1}}_{=2\cdot2^k}}\Bigg)=f\left(\frac{\overbrace{\frac{x_1+\dots+x_{2^k}}{2^k}}^{y_1\,\in(a,b)}+\overbrace{\frac{x_{2^k+1}+\dots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}^{y_2\,\in(a,b)}}{2}\right)$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ f \text{ конвексна}\\ \lambda=\frac12}}{\le}\frac{f(y_1)+f(y_2)}{2}=\frac{f\left(\frac{x_1+\dots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+\dots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2}\le$$

$$\underset{(ИХ)}{\le}\frac{\frac{f(x_1)+\dots+f(x_{2^k})}{2^k}+\frac{f(x_{2^k+1})+\dots+f(x_{2^{k+1}})}{2^k}}{2}=\frac{f(x_1)+\dots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}$$

2° Претпоставимо да неједнакост важи за неко $n\in\mathbb{N}$.

Да ли важи и за $n-1$?

За произвољне $y_1,\dots,y_n\in(a,b)$ претпоставили смо да важи

$$f\left(\frac{y_1+\dots+y_n}{n}\right)\le\frac{f(y_1)+\dots+f(y_n)}{n}.$$

Показујемо да за произвољне $x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\in(a,b)$ важи

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})}{n-1}.$$

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}=\frac{\overset{(n-1)+1}{\overset{\parallel}{n}}\cdot\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}}{n}=\frac{\overset{=y_1}{x_1}+\overset{=y_2}{x_2}+\dots+\overset{=y_{n-1}}{x_{n-1}}+\overset{=y_n\in(a,b)}{\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}}}{n}$$

$$f\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)=f\left(\frac{y_1+\dots+y_n}{n}\right)\overset{(ИХ)}{\le}\frac{f(y_1)+\dots+f(y_n)}{n}=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+f\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}\quad/\cdot n$$

$$n\cdot f\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)\le f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})+f\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow\ (n-1)f\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)\le f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})$$

$$f\left(\frac{x_1+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)\le\frac{f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})}{n-1}$$