Редови

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \to$ ред

a_n — општи члан

Кошијев крит. конв.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\quad n, m > n_0 \quad |S_n - S_m| < \varepsilon$

$m > n \qquad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако $\lim_{n\to\infty} S_n$ постоји у $\mathbb{R}$ (тј. низ S_n конв.)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира ако $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ или не постоји

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. акко $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ конв.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв акко $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0,\ p \in \mathbb{N}_0$
  $|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  $\not\Leftarrow$
- $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ конв. и $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ конв. и $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Испитати конв. реда и уколико је могуће израчунати га.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$ → хармонијски ред

$$= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0 \qquad S_n$ није Кошијев:

$n = n,\ m = 2n,\ n \in \mathbb{N}$

$$|S_m - S_n| = |S_{2n} - S_n| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow S_n$ дивергира $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира

$S_n \uparrow$, дивергира $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$ Геометријски ред

1° $|q| \geq 1$ $a_n = q^n \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ дивергира

2° $|q| < 1$ $a_n \to 0$ ✓

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} q(1+q+\dots+q^{n-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} q \frac{1-q^{n} \xrightarrow{} 0}{1-q} = \frac{q}{1-q} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ конвергира}$$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$, $q \in \mathbb{R}$

1° $|q| \geq 1$ $nq^n \not\to 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^n$ дивергира

2° $|q| < 1$ $nq^n \to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} kq^k = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n}_{S_n})$$

$$qS_n = q^2 + 2q^3 + 3q^4 + \dots + nq^{n+1}$$

$$S_n - qS_n = \underbrace{q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots + q^n} - nq^{n+1}$$

$$(1-q)S_n = q\frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1}$$

$$S_n = q\frac{1-q^n \xrightarrow{} 0}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1} \xrightarrow{} 0}{1-q} \quad \Big/ \lim_{n\to\infty}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{(1-q)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nq^n \text{ конв.}$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

⑤ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{2}\sqrt{2}+\sqrt{1}+\sqrt{4}-\cancel{2}\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{2}}+\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\cancel{\sqrt{3}}+\dots-\right.$

$\left.+\cancel{\sqrt{n+1}}-2\cancel{\sqrt{n}}+\cancel{\sqrt{n-1}}+\sqrt{n+2}-\cancel{2}\sqrt{n+1}+\cancel{\sqrt{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$

$=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{1+2/n}-\sqrt{1+1/n}\right)=$

$=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\cancel{1}+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}}}_{\downarrow\, 0}+\underbrace{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\downarrow\, 0}$

$=1-\sqrt{2}$

За вежбу:

$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}2^{\sqrt{n}}$

Редови са позитивним члановима

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \geq n_0$

* Интегрално правило :

$f \in C[1,+\infty)$, ≥ 0, $\downarrow$, $a_n = f(n)$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ конв.

① $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $p>0$ $\in C[1,+\infty)$, $\downarrow$, ≥ 0

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ конв. акко $p>1$

интегрално $\Rightarrow$ правило $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ конв акко } p>1}$

⌈ за $p \leq 0$ $\frac{1}{n^p} \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ див. ⌋

② $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}}_{a_n}$

1° $\alpha < 0$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = \frac{\overset{1^\circ}{n^{-\alpha}}}{\ln^\beta n} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ дивергира

2° $\alpha = 0$, $\beta \leq 0$ $a_n = \ln^{-\beta} n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ дивергира

3° $\alpha > 0$ или $\alpha = 0, \beta > 0$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} \in C[2,+\infty)$, ≥ 0

$f'(x) = (x^{-\alpha} \ln^{-\beta} x)' = -\alpha x^{-\alpha-1} \ln^{-\beta} x - \beta x^{-\alpha} \ln^{-\beta-1} x \cdot \frac{1}{x} =$

$= \underbrace{x^{-\alpha-1} \ln^{-\beta} x}_{\overset{\vee}{0}} \left(-\alpha - \beta \frac{1}{\ln x} \right) < 0$ за $x \geq x_0(\alpha, \beta)$

за $x \geq x_0$ $f \downarrow$

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ конв акко $\alpha > 1$ или $(\alpha = 1 \text{ и } \beta > 1)$ (прошли час)

интегрално $\Rightarrow$ правило $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \text{ конв акко } \alpha > 1 \text{ или } (\alpha = 1 \text{ и } \beta > 1).}$

③ $\sum_{n=3}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^{\alpha+1}}}_{a_n \to 0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))^{\alpha+1}} \in C[3,+\infty)$, $\downarrow$, ≥ 0

$f(n) = a_n$

$$\int_3^{+\infty} f(x)dx = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln(\ln x))^{\alpha+1}} = \begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^{\alpha+1}}$$

$$= \begin{bmatrix} u=\ln t \\ du = \frac{dt}{t} \end{bmatrix} = \int_{\ln(\ln 3)>0}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha+1}} \quad \text{конв акко} \quad \alpha > 0$$

интегрално $\Longrightarrow$ правило $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$ конв. акко $\alpha > 0$

за вежбу
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right)$ конв ?

* Поредбени критеријуми: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$

I : $0 \leq a_n \leq b_n$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ див.

II : $b_n > 0$, $n \geq n_0$, $a_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in [0,+\infty]$

1° $c < +\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ див.

2° $c > 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конв.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ див. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ див.

3° $0 < c < +\infty$ $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конв. $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конв.

III $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n \geq n_0$ (b_n „спорије опада" од низа a_n)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конв. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ див. $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ див.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \overbrace{\cos\frac{\pi}{3^n}}^{<1}\right)}_{a_n \to 0}$ конв ?

$\cos\frac{\pi}{\underbrace{3^n}_{\downarrow 0}} \sim 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{3^{2n}}$, $n \to +\infty$

$\cos x \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$, $x \to 0^+$ $\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1 - \frac{1}{2}x} = 1 \right)$

$a_n = 1 - \cos\frac{\pi}{3^n} \sim 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{3^{2n}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{3^{2n}}}_{b_n}$, $n \to +\infty$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2 \cdot 3^{2n}} = \frac{\pi^2}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$ $\rightarrow$ конв. као геом. ред $q = \frac{1}{9}$

II поредб. $\xRightarrow[\text{криш. } 3^\circ]{}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конв.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \sin\frac{2022}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\sqrt{n}}}_{a_n}$ $\qquad \ln(1+x) \sim x$, $x \to 0$

$\sin x \sim x$, $x \to 0$

$a_n \geq 0$ за $n \geq 2022^3$

$a_n = \frac{\ln\left(1 + \sin\frac{2022}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\sqrt{n}} \sim \frac{\sin\frac{2022}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n}} \sim \frac{\frac{2022}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n}} = \frac{2022}{n^{5/6}}$, $n \to +\infty$

$b_n = \frac{2022}{n^{5/6}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2022}{n^{5/6}}$ дивергира јер $5/6 < 1$

II поредб. $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

крит.

за вежбу: испитати конв.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $a > 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \ln\left(1+\operatorname{arctg}\frac{2}{n}\right) \sin\left(\frac{\sqrt[3]{n}-1}{n+1}\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}$