(б) → сингуларна ако f не може да се непрекидно додеф. (или је $\pm\infty$)

$$\int_a^b f(x)dx \overset{(*)}{=} \lim_{\beta\to b^+}\int_a^\beta f(x)dx$$

a → није синг.

b^+ → (ако је $a>b$)

b^- (ако је $b>a$)

ако постоји лим са десне стр. у $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ конв.

иначе $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ див.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_c^d g(x)\,dx}_{} = \int_e^f h(x)\,dx$$

конв.	конв.	$\Rightarrow$ конв.
див.	див.	$\Rightarrow$ не знамо
конв.	див.	$\Rightarrow$ див.

(б) → синг.

$\int_a^b f(x)dx$ конв. акко $\int_c^b f(x)dx$ конв., $c\in[a,b)$

---

(1) $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx =$ $\left[\begin{array}{l} u=\ln(\sin x) \to du = \frac{\cos x}{\sin x}dx \\ dv=dx \to v=x \end{array}\right] \overset{(*)}{=}$

0 → сингуларитет

$$\underbrace{x\cdot\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} x\frac{\cos x}{\sin x}dx}_{} = \left[\begin{array}{l} u=x \to du=dx \\ dv=\operatorname{ctg}x\,dx \\ v=\int \operatorname{ctg}x\,dx = \ln(\sin x)\end{array}\right] = \underbrace{-x\ln(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{2}\cdot\ln(\sin\tfrac{\pi}{2})}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to0^+} x\ln(\sin x)}_{=0}$$

ово је својствен интеграл јер подинтегралну ф-ју можемо непр. додеф у 0

$\Rightarrow \int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ - конвергира

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\underbrace{\sin x}_{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}})dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln2+\ln(\sin\tfrac{x}{2})+\ln(\cos\tfrac{x}{2})\,dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln2\,dx}_{\ln2\cdot\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\tfrac{x}{2})dx}_{} + \underbrace{\int_0^{\pi/2}\ln(\cos\tfrac{x}{2})dx}_{}$$

$t=x/2$, $dt=\frac{dx}{2}$, $t(0)=0$, $t(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$

$t=x/2$, $dt=\frac{dx}{2}$

$$= \ln2\cdot\frac{\pi}{2} + 2\underbrace{\int_0^{\pi/4}\ln(\sin t)dt}_{\text{конв.}} + 2\underbrace{\int_0^{\pi/4}\ln(\cos t)dt}_{\text{својствен интеграл}} = \ln2\cdot\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\pi/4}\ln(\sin t)dt + 2\int_{\pi/2}^{\pi/4}\ln(\sin u)(-du)$$

$u=\frac{\pi}{2}-t$

$\cos t = \cos(\frac{\pi}{2}-u)=\sin u$

$u(0)=\frac{\pi}{2}$, $u(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

$du=-dt$

$$= \ln2\cdot\frac{\pi}{2}+2\int_0^{\pi/4}\ln(\sin t)dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln(\sin t)dt$$

$u=t$

$$= \ln2\cdot\frac{\pi}{2} + 2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\pi/2} \ln|\sin t|\,dt = -\ln 2\cdot\frac{\pi}{2}}$$

овако деф. лева конв. акко оба интеграла са десне стране конвергирају!

(2) $$\int_{-1}^{5}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} := \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_1^0 \frac{-dt}{\sqrt t} + \int_0^5\frac{dx}{\sqrt x} = -\frac{t^{1/2}}{1/2}\Big|_1^0 + \frac{x^{1/2}}{1/2}\Big|_0^5$$

$t = -x$

имамо сингуларитет у 0

конвергирају

$$= \frac{1}{1/2}+\frac{\sqrt5}{1/2} = 2\sqrt5+2 .$$

$$\int_0^{100}\frac{dx}{\sqrt[3]{(b-x)(a-x)}} = \int_0^a \frac{dx}{---} + \int_a^b\frac{dx}{---} + \int_b^{100} ---$$

$a,b\in(0,100)$, $a<b$

- $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} \text{ дивергира}$$

дивергира

v.p. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} := \ln 1 - \ln|-1| = 0$

. - - -

Критеријуми конвергенције

$\int_a^b f(x)dx$ апсолутно конв. ако $\int_a^b |f(x)|dx$ конвергира

$\int_a^b f(x)dx$ условно конв. ако $\int_a^b f(x)dx$ конв. (може да се деси и да $\int_a^b |f(x)|dx$ дивергира)

иначе $\int_a^b f(x)dx$ дивергира.

апсолутна конв. $\Rightarrow$ условно конв.

$\not\Leftarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^p} \text{ конв акко } p<1 \\[2ex] \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ конв. акко } p>1 \end{array}}$$

* Поредбени критеријуми: $\quad 0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

I : $0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, b)$

$\int_a^b f(x)\,dx$ дивергира $\implies \int_a^b g(x)\,dx$ дивергира

$\int_a^b g(x)\,dx$ конв. $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ конвергира

II : $0 < g(x) \quad \forall x \in [c, b)$, $c \in [a,b)$, $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{уколико постоји}}{=} C \in [0, +\infty]$

$0 \le f(x)$ $\qquad$ (b^- ако $a<b$, иначе b^+ за $b<a$)

- $c \in [0, +\infty)$: $\int_a^b g(x)\,dx$ конв. $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ конв. $\left(\int_c^b f(x)\,dx \text{ див.} \implies \int_c^b g(x)\,dx \text{ див.} \right)$
- $c \in (0, +\infty]$: $\int_a^b f(x)\,dx$ конв $\implies \int_a^b g(x)\,dx$ конв. $\left(\int_c^b g(x)\,dx \text{ див.} \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ див.} \right)$
- $c \in (0, +\infty)$: $\int_a^b f(x)\,dx$ конв $\iff \int_a^b g(x)\,dx$ конв.

Испитати конв. интеграла:

① $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x} \qquad \ln x < x \implies \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} > 0$

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ – дивергира ($p=1$) $\underset{\text{I поредб. крит.}}{\implies} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ дивергира

② $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad e^{x^2} \ge x^2 \implies e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \le \frac{1}{x^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ конв. $\underset{\text{I поредб. крит.}}{\implies} \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ конв.

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ – својствен интеграл $\implies$ конв.

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ – конв као збир два конв. интеграла
– апсолутно конв.

③ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}}$

и ово је сингуларитет

$\int_0^1 \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}}$: $\frac{1}{(x+4)x^{1/4}} \sim \frac{1}{4x^{1/4}}$, $x\to 0^+$ $\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{(x+4)x^{1/4}}}{\frac{1}{4x^{1/4}}} = 1 \right)$

$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/4}}$ конв. $\underset{\text{II поредб. крит.}}{\Rightarrow}$ $\int_0^1 \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}}$ конв.

$p = \frac{1}{4} < 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}}$: $\frac{1}{(x+4)x^{1/4}} \sim \frac{1}{x\cdot x^{1/4}} = \frac{1}{x^{5/4}}$, $x\to+\infty$ $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x+4)x^{1/4}}}{\frac{1}{x^{5/4}}} = 1 \right)$ $\neq$ C

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/4}}$ конв. $\underset{\text{II поредб. крит.}}{\Rightarrow}$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}}$ конв.

$p = \frac{5}{4} > 1$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+4)x^{1/4}}$ конв. $\to$ и то апсолутно конв.

---

(4) $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{14}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

$\ln\left(1+\underbrace{\frac{14}{\sqrt[3]{x}}}_{\to 0,\ x\to+\infty}\right) \sim \frac{14}{\sqrt[3]{x}}$, $x\to+\infty$, $\int_1^{+\infty}\frac{14\,dx}{x^{1/3}}$, $p=\frac{1}{3} < 1 \to$ дивергира

$\underset{\text{II поредбени крит.}}{\Rightarrow}$ $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{14}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ дивергира

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\,dx$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$

$\left|e^{-ax}\sin(bx)\right| \underset{|\sin bx|\le 1}{\le} e^{-ax} \le \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-ax}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{ax}} = 0$

$\int_1^{+\infty}\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx \le \int_1^{+\infty}\underbrace{\frac{dx}{x^2}}_{\text{конв.}}$ $\underset{}{\overset{\text{I поредб. крит.}}{\Rightarrow}}$ $\int_1^{+\infty}\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx$ конв.

$\int_0^1\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx$ - конв. као својствен интеграл

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin bx| \, dx$ конв.

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx$ конв. абсолютно.