① $f(x) = \ln|x^2-4x+3|$

1° $x^2-4x+3 \neq 0$

$x \neq 1, 3$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{1,3\} = (-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$

нуле: $f(x)=0 \iff \ln|x^2-4x+3| = \ln 1$

$|x^2-4x+3| = 1 \longrightarrow x^2-4x+3 = 1 \to x^2-4x-2=0 \to x_{1,2} = 2\pm\sqrt{2}$

$\longrightarrow x^2-4x+3 = -1 \to x^2-4x+4=0 \to x_3 = 2$

знак: $f(x)>0$ $\quad x\in(-\infty, 2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2},+\infty)$

$f(x)\leq 0$ $\quad x\in(2-2\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})\setminus\{1,3\}$

f није непарна, није парна

f није периодична

2° асимптоте

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \ln|\underbrace{x^2-4x+3}_{\downarrow 0}| = -\infty = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\ln|x^2-4x+3|}{x} = 0$ $\Bigg\}$ f нема ни вертикалне ни хоризонталне асимптоте

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln|x^2-4x+3| = +\infty$

$x\to\pm\infty$ $\quad f(x) = \ln|x^2-4x+3| \sim \ln x^2 \sim 2\ln|x|$.

3° монотоност

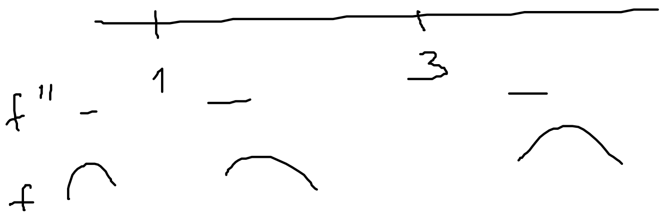
$f'(x) = \frac{1}{|x^2-4x+3|}\cdot \mathrm{sgn}(x^2-4x+3)\cdot(2x-4) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$

		1		2		3	
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	↘		↗		↘		↗

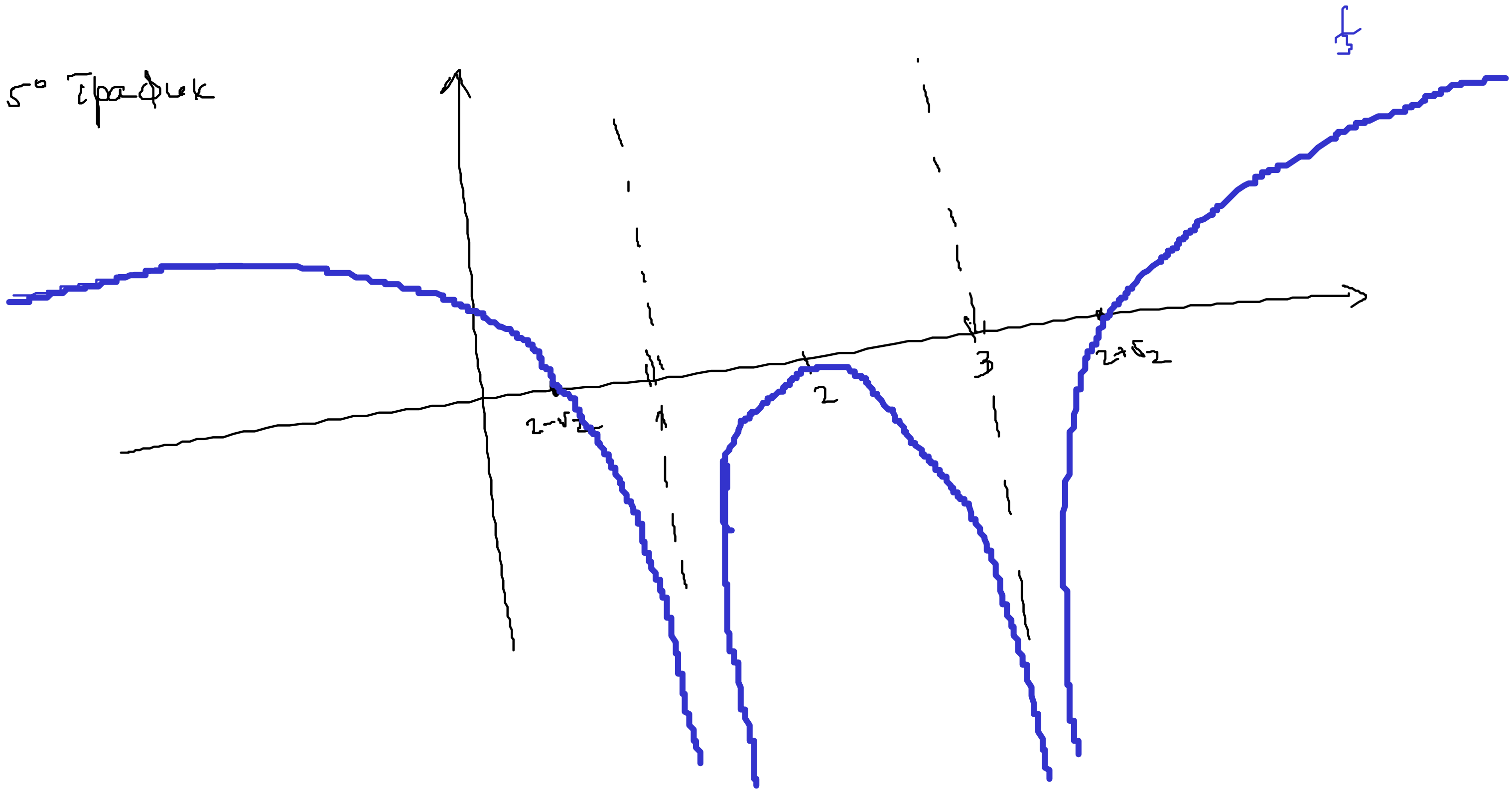
$f(2)$ локални макс.

4° конвексност

$$f''(x) = \frac{2(x^2-4x+3) - (2x-4)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} = -\frac{2(x^2-4x+5)}{(x^2-4x+3)^2}$$



5° График



② a) $a \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$

$x_1 = a$

$x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$

Испитати конв. низа x_n

б) Доказати да ако је $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ онда је ξ јединствено решење ј-не $x - \varepsilon \sin x = a$.

---

a) $x_{n+1} = f(x_n)$

$f(x) = a + \varepsilon \sin x \Rightarrow f'(x) = \varepsilon \cos x \Rightarrow |f'(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c), \; c \in (x, y)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = |f'(c)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon |x-y|$

$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \varepsilon |x_n - x_{n-1}| \quad , \quad \forall n \geq 2 .$

$\Rightarrow \quad |x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \cdot \varepsilon |x_{n-1} - x_{n-2}| = \varepsilon^2 |x_{n-1} - x_{n-2}|$

$\leq \varepsilon^3 |x_{n-2} - x_{n-3}| \leq \cdots \leq \varepsilon^{n-1} |x_2 - x_1| \quad \forall n \geq 2$

$m > n \quad \Rightarrow \quad |x_m - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$

$\leq \left(\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \cdots + \varepsilon^{n-1}\right) \cdot |x_2 - x_1|$

$= \varepsilon^{n-1} (1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{m-n}) |x_2 - x_1|$

$= \varepsilon^{n-1} \cdot \dfrac{1 - \varepsilon^{m-n+1}}{1-\varepsilon} |x_2 - x_1|$

$\leq \varepsilon^{n-1} \dfrac{1}{1-\varepsilon} |x_2 - x_1| \longrightarrow 0 \; , \quad n \to +\infty$

$\Rightarrow$ x_n је Кошијев $\Rightarrow$ x_n конвергира

б) $g(x) = x - \varepsilon \sin x - a$

$g'(x) = 1 - \varepsilon \cos x > 0 \Rightarrow g \uparrow$ — строго расте

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$\Downarrow$

$\exists x_1 > 0 \quad g(x_1) > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \Rightarrow \exists x_2 < 0 \quad g(x_2) < 0$

$\Big\}$ Коши-Болцано $\Rightarrow$ $\exists c \in (x_2, x_1) \; g(c) = 0$

Ако $c_2 \in \mathbb{R} : \; g(c_2) = 0$

$g \uparrow \Rightarrow \forall x > c_2 \quad g(x) > g(c_2) = 0 \qquad \Rightarrow$ c је јединствено

$\forall x < c_2 \quad g(x) < g(c_2) = 0$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(a+\varepsilon \sin x_n) = a+\varepsilon\sin\xi$.

$\Rightarrow \xi = c$.

(3) а) Доказати да постоји јединствено реш. ј-не

$$e^{x}+nx=2019$$

б) Ако је a_n реш из а) испитати конв низа a_n

в) $\lim_{n\to\infty} n(n(na_n-2018)-2018) = ?$

а) $f(x)=e^{x}+nx-2018$

$f'(x)=e^{x}+n>0 \Rightarrow f\uparrow$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\exists!\, a_n$ реш. ј-не $f(x)=0$

$e^{a_n}+na_n=0$

б)

$f(0)=e^{0}+n\cdot 0-2019=-2018<0$

$f(a_n)=0>f(0)$, $f\uparrow \Rightarrow a_n>0$

$e^{a_n}+na_n=2019$

$e^{a_{n+1}}+(n+1)a_{n+1}=2019$ −

$e^{a_{n+1}}-e^{a_n}+n(a_{n+1}-a_n)+a_{n+1}=0$ (*)

ако $a_{n+1}\geq a_n$ $e^{a_{n+1}}-e^{a_n}\geq 0$, $a_{n+1}-a_n\geq 0$, $a_{n+1}>0$ $\lightning$ са (*)

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ a_n<a_{n+1}$

Т о монотоној $\Rightarrow$ конв. a_n конв., $a_n>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$ ако $a>0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} na=+\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{a_n}+na_n=+\infty$ $\lightning$

$$\Rightarrow \boxed{a=0}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} n\big(n(2018 - \underset{\underset{2019-e^{a_n}}{\parallel}}{n a_n}) - 2018\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\big(n(\underset{\underset{1+a_n+\frac{a_n^2}{2}+o(a_n^2)}{\parallel}}{e^{a_n}} - 1) - 2018\big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\Big(n\big(a_n + \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)\big) - 2018\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\Big(\underline{\underline{n a_n}} + \frac{n a_n^2}{2} + o(n a_n^2)\ \underline{\underline{-2018}}\Big) \Rightarrow 1-e^{a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \underset{a_n+o(a_n)}{e^{a_n}} + \frac{n a_n^2}{2} + o(n a_n^2)\Big)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underset{\underset{-2018}{\downarrow}}{-n a_n} + \underset{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{o(2018)}}{\overset{\parallel}{o(n a_n)}} + \underset{\underset{\frac{2018^2}{2}}{\downarrow}}{\frac{n^2 a_n^2}{2}} + \underset{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{o(2018^2)}}{\overset{\parallel}{o(n^2 a_n^2)}} = \frac{2018^2}{2} - 2018.$$

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = \lim_{n\to\infty} 2019 - \underset{\underset{1}{\downarrow}}{e^{a_n}} = 2018$$