Лагранж: $f \in C[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow \exists c \in [a,b] \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

① Показати:

a) $\left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \leq |x-y| \quad , \quad x,y > 0$

$$\left| \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} \right| \leq |x-y| \quad \checkmark$$

$$(1+x)(1+y) > 1$$

б) $\left| \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y \right| \leq |x-y| \quad , \quad x,y \in \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

$f \in C[\overleftrightarrow{a,b}] \cap \mathcal{D}(a,b) \quad , \quad a,b \in \mathbb{R} \quad \xRightarrow{\text{Лагранж}} \quad \exists c \in (a,b) \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f'(c) = \frac{1}{1+c^2} \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \left| \underset{\substack{\text{IV}\\0}}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \right| = |\underset{\substack{\text{IV}\\0}}{f'(c)}| = \left| \frac{1}{1+c^2} \right| \leq 1 \qquad / \cdot |b-a| \quad , \quad b \neq a$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ |\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a|}}{|f(b) - f(a)|} \leq |b-a|$$

Може да се користи

② $f \in C(a,b) \cap \mathcal{D}(a,b) \quad , \quad a,b \in \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad f'$ ограничен на $(a,b) \Rightarrow f$ равн непр на (a,b).

$\exists M > 0 \quad |f'(x)| \leq M \quad , \quad \forall x \in (a,b)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x,y \in (a,b) \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \Leftrightarrow f$ равн непр.

$x,y \in (a,b) \qquad |f(x) - f(y)| = ?$

$f \in C[\overleftrightarrow{x,y}] \cap \mathcal{D}(\overleftrightarrow{x,y}) \quad \xRightarrow{\text{Лагранж}} \quad \exists \xi \in (\overleftrightarrow{x,y}) \qquad \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(\xi)| \leq M$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \rightarrow \delta(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

$\Downarrow$

f је Липшицова

$\Downarrow$

f је равн непр.

③ Испитати равн непр

a) $f(x) = \sqrt{x} \ln^2 x \quad , \quad x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln^2 x + \sqrt{x}\, 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln^2 x + 2\frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$$

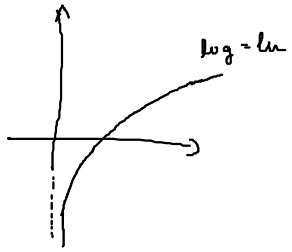
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln^2 x}_{\to 0} + 2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}_{\to 0}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \overset{ЛП}{\underset{*}{=}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 4\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{ЛП}{\underset{*}{=}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 4\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 8\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{2\sqrt{x}} + \frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = \infty \longrightarrow \text{немамо огран}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln^2 x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2 x}{x^{-1/2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{ЛП}{\underset{*}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{ЛП}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{2\frac{1}{x}}{\frac{1}{4}x^{-3/2}} = \lim_{x\to0^+}\frac{8}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to0^+} 8x^{1/2} = 0.$$



$\Rightarrow$ f се може додефинисати у 0 непрекидно $\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ непрекидно

Кантор $\Rightarrow \tilde{f}$ равн непр на $[0,M]$, $M>0 \Rightarrow f$ равн непр на $(0,M]$ } $\Rightarrow f$ равн непр на $(0,+\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow f'$ огран. на $[M,+\infty) \overset{(2)}{\Rightarrow} f$ равн непр на $[M,+\infty)$

б) $f(x) = (x^2+x)\sin\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

$$f'(x) = (2x+1)\sin\frac{1}{x} + (x^2+x)\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= (2x+1)\sin\frac{1}{x} - \left(1+\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x+1)\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} - \left(1+\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{(2x+1)\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}_{\to 2} - \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\underbrace{(x^2+x)}_{\to 0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{ограничен}} = 0 \Rightarrow \text{можемо да непрекидно додеф у } 0$$

$\Rightarrow f$ равн непр на $(0,M]$, $M>0$

f равн непр на $[M,+\infty)$, $M>0 \longrightarrow f$ равн непр на $(0,+\infty)$

Испитивање фја

$f(x) =$ израз

1° домен, специјална својства фје (парност, периодичност), нуле и знак ако је очигледно

2° асимптоте и понашање фје на рубу домена

(нпр $D_f = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ фја има косу/хоризонталну асимптоту $ax+b$

може се десити да је $a = \pm\infty$ или $b = \pm\infty$ или ови лимеси не постоје, тада не постоји асимптота

$\lim\limits_{x\to a^{+/-}} f(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$ фја вертикалну асимптоту здесна/слева

$= b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ онда гледамо под којим углом фја прилази овој вредности уз помоћ f'.)

3° монотоност и локални екстремуми (овде можемо да испитамо знак и нуле фје f)

$f'(x) = \dots$ $\qquad f' > 0 \Rightarrow f \uparrow$

$\qquad\qquad\qquad f' < 0 \Rightarrow f \downarrow$

4° конвексност и превојне тачке

$f''(x) = \dots$ $\qquad f'' > 0 \Rightarrow f \cup$

$\qquad\qquad\qquad f'' < 0 \Rightarrow f \cap$

5° цртање графику

(1) $f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$

1° $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f(-2) = 0$, $x = -2$ нула фје

$x < -2$ $\quad f(x) < 0$

$x > -2$ $\quad f(x) > 0$

f није ни парна, ни непарна

f није ни периодична

2° асимптоте:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{(x+2)}_{\to 2} e^{\overbrace{1/x}^{\to +\infty}} = +\infty$ $\Rightarrow$ имамо вертикалну асимптоту здесна у 0

$f_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \underbrace{(x+2)}_{\to 2} \underbrace{e^{\overbrace{1/x}^{\to -\infty}}}_{\to 0} = 0$ $\Rightarrow$ немамо вертикалну асимптоту слева у 0

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}\underbrace{e^{1/x}}_{\to 1}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\underbrace{e^{1/x}}_{=1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}-x=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-x=$$

$1/x \to 0$

$$=\lim_{x\to+\infty}\cancel{x}+1+2+\frac{2}{x}+o(1)+o\left(\frac{2}{x}\right)-\cancel{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}3+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}+\underbrace{o(1)}_{\to 0}=3.$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=3$$

Косе асимптоте: $x\to\pm\infty$, $\underline{\underline{y=x+3}}$

3° монотоност:

$$f'(x)=\left((x+2)e^{1/x}\right)'=e^{1/x}+(x+2)e^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{e^{1/x}}{x^2}\left(x^2-x-2\right)$$

$$=\frac{e^{1/x}}{x^2}(x-2)(x+1)$$

$\Rightarrow$ -1 → локални макс. $f(-1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$

2 → локални мин. $f(2)=4e^{1/2}=4\sqrt{e}$

		-1		0		2	
f'	$+$		$-$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(x+h)-f_-(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{(h+2)e^{1/h}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-(h+2)\left(-\frac{1}{h}\right)}{e^{-1/h}}=0$$

$(h+2)\to 2$, $-\frac{1}{h}\to+\infty$, $e^{-1/h}\to+\infty$

4° конвексност:

$$f''(x)=\left(\frac{e^{1/x}}{x^2}\left(x^2-x-2\right)\right)'=\frac{e^{1/x}\cdot\left(-1/\cancel{x^2}\right)\left(x^2-x-2\right)\cdot\cancel{x^2}+e^{1/x}\cdot(2x-1)x^2-2xe^{1/x}\left(x^2-x-2\right)}{x^4}$$

$$=\frac{e^{1/x}}{x^4}\left(-\cancel{x^2}+x+2+\cancel{2x^3}-\cancel{x^2}-\cancel{2x^3}+\cancel{2x^2}+4x\right)$$

$$=\frac{e^{1/x}}{x^4}(5x+2)$$

		$-2/5$		0	
f''	$-$		$+$		$+$
f	$\frown$		$\smile$		$\smile$

$\Rightarrow$ $-\frac{2}{5}$ превојна тачка

$f\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$

5° цртање графика: