$f : [0,1) \to (0,1)$ непр и НА

$\Rightarrow \quad f : [0, \frac{1}{2}]$ није НА

$f[0, \frac{1}{2}] = [a, b]$ $\qquad \frac{a}{2} \qquad \frac{1+b}{2}$

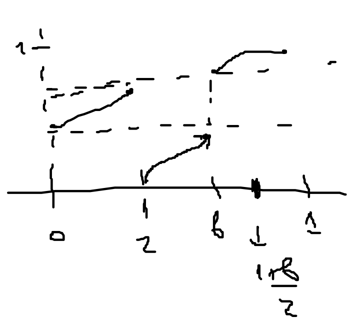
$f[\frac{1}{2}, 1) \supset [0,1) \setminus [a,b] = [0,a) \cup (b,1)$

Коши-Болцано (f непр.) $\quad f[\frac{1}{2}, 1) \supset [\frac{a}{2}, \frac{1+b}{2}]$

$\Rightarrow f$ НА на $[\frac{1}{2}, 1)$

$\Uparrow$

c



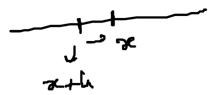
Диференцирање

- $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у $x \in (a,b)$ ако $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R}$.

$f'(x)$ је извод ф-је f у x.

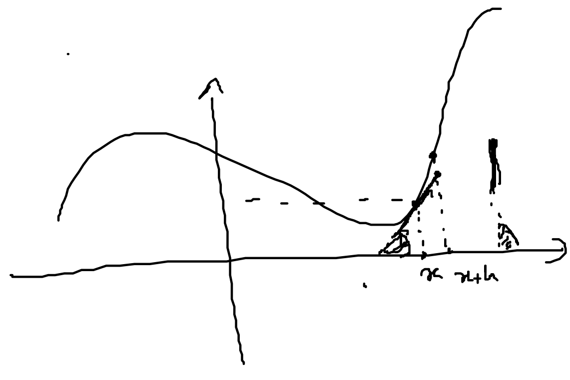
$\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x)$ прираштај ф-је f

леви извод ф-је f у тачки x $\quad f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$



десни извод ф-је f $\quad f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f'_+(x) = f'_-(x) \iff f$ диф у x.



- f, g диф у x

$(\alpha f \pm \beta g)'(x) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$

$(fg)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

- f диф x, g диф $f(x)$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

- f бијекција : $(a,b) \to f((a,b))$ и диф у x и f^{-1} диф у $f(x)$, $f'(x) \neq 0$

$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

Δ: $(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad /'$

$(f^{-1} \circ f)'(x) = (x)' = 1$

$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ диф на (a,b)

$\Rightarrow f':(a,b)\to\mathbb{R}$

$f\in C^1((a,b))$ → f непрекидна, диф. и f' непрекидна на (a,b)

$f\in \mathcal{D}((a,b))$ → f непр и диф на (a,b)

$(f')'=f''$ → други извод

$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ → n-ти извод фје f

$f\in C^n(a,b)$ → f непрекидна, n-пута диф и $f^{(n)}$ непр. фја на (a,b)

f диф $\Rightarrow$ f непр.

$\not\Leftarrow$

$f\in\mathcal{D}^n(a,b)$ → f непр., n-пута диф на (a,b) $\Rightarrow f^{(n-1)}\in C((a,b))$

$f^{(n-1)}\in\mathcal{D}((a,b))$

$f(x)$	$f'(x)$
const.	0
$x^a,\ a\in\mathbb{R}$	$a\cdot x^{a-1}$
$a^x,\ a>0$	$a^x\ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

→ важи на пресеку домена фје f и f'.

→ $(\arcsin(\sin x))'=\frac{1}{\cos x>0}$

$\sin x=t$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$(\arcsin t)'=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$t\in[-1,1]$

$\sin:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-1,1)$

$\arcsin:(-1,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

1) Наћи извод и испитати диф фје:

а) $f(x)=x^x$, $x>0$

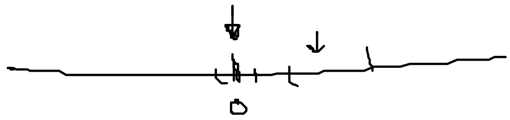
$$g(t)=e^t$$

$$f(x)=e^{x\cdot\ln x} \qquad t(x)=x\cdot\ln x$$

$$f'(x)=\left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = g'(t)\cdot t'(x) = e^{t(x)}\cdot\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^x\cdot(\ln x+1) \,.\qquad x>0$$

f је диф на $(0,+\infty)$.



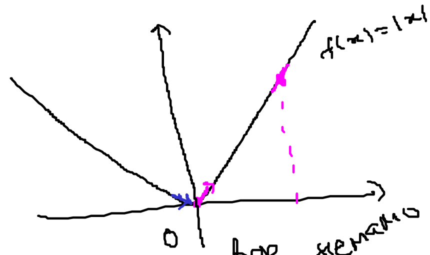
б) $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} f \text{ диф на } (0,+\infty) & f'(x)=1\\ f \text{ диф на } (-\infty,0) & f'(x)=-1\end{array}$$

Шта се дешава у 0?

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} = ? \qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1 \;\ne\; \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

$\Rightarrow f$ није диф у 0.



бар немамо тангенту на график фје

в) $$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

$x\ne 0 \Rightarrow f$ има прекид у x $\Rightarrow f$ није непрекидна у x

$q_n\in\mathbb{Q}$, $r_n\notin\mathbb{Q}$ $\Rightarrow f$ није диф у x

$q_n\to x$ $\quad \lim_{n\to\infty} f(q_n)=x^2$

$r_n\to x$ $\quad \ne \quad x\ne 0$

$\lim_{n\to\infty} f(r_n)=0$

$x=0$: $\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ?$

$h\in\mathbb{Q}$ $\quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2-0}{h} = h \to 0,\quad h\to 0$

$h\notin\mathbb{Q}$ $\quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0\to 0,\quad h\to 0$

највероватније $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0 \ldots$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall|h|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right|<\varepsilon$

$\delta = \varepsilon$ ✓

$\Rightarrow$ f јесте диф у 0.

i) $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$

f непрекидна у $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$?

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} n \cdot \sin^2 \pi x = 0 \qquad \Rightarrow f \text{ непр у } n,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} (n-1) \cdot \sin^2 \pi x = 0$$

$\hookrightarrow \sin^2 \pi n = 0$

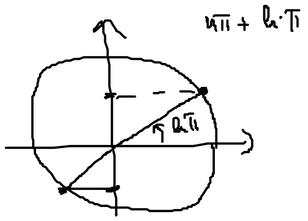
f непр на $\mathbb{R}$

$f(x) = n \cdot \sin^2 \pi x$, $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{Z}$

f је диф на $(n, n+1)$

Потребно је испитати шта се дешава у $x = n$.

$$f'_+(n) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[n+h] \sin^2 \pi (n+h) - \underbrace{[n] \sin^2 \pi n}_{=0}}{h}$$



$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{n \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} \sin \pi h}{h\pi} \pi = \pi n$$

$\hookrightarrow \pi$

$$f'_-(n) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(n-1) \sin \pi h}{h\pi} \cdot \pi = \pi (n-1)$$

$\Rightarrow$ f није диф у $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$

g) $f(x) = \sin x \cdot |x| = \begin{cases} x \sin x, & x \geq 0 \\ -x \sin x, & x < 0 \end{cases}$

f диф на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$x = 0$: $$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h \cdot \sin h}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sin h = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\sin h = 0.$$

$\Rightarrow$ f је диф у 0. $\Rightarrow f'(0) = 0$.

① Одредити $a,b\in\mathbb{R}$, тако да је f диференцијабилна на $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x e^{bx}+a, & x<0 \\ x^3+bx, & x\geq 0\end{cases}$$

$x<0 \Rightarrow f$ диф ✓ $\to f'(x)=e^{bx}+bxe^{bx}$, $x<0$

$x>0 \Rightarrow f$ диф ✓ $f'(x)=3x^2+b$, $x>0$

$x=0$: 1° f мора бити непр у 0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^3+bx=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot e^{bx}+a=a\end{array}\right\} a=0$$

2° f диф у 0

$$f(x)=\begin{cases} xe^{bx}, & x<0 \\ x^3+bx, & x\geq 0\end{cases}$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^3+bh}{h}=b$$

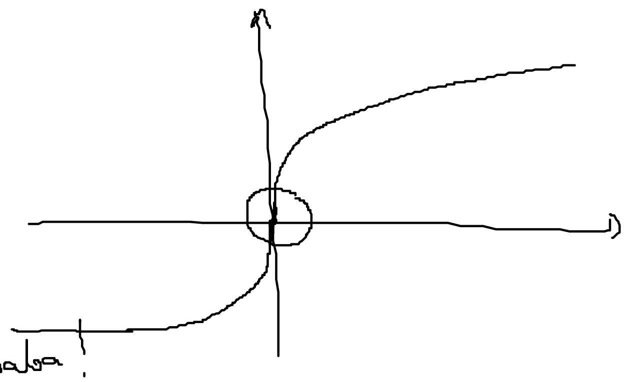
$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h\cdot e^{bh}}{h}=\lim_{h\to 0^-}e^{bh}=1$$

$\Rightarrow b=1 \Rightarrow f$ диф у 0.

$f'(0)=1$.

$a=0$, $b=1$.

$f(x)=x^{1/3}$ → домен $\mathbb{R}$
↳ непр.



$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq 0$

$x=0$ → треба да проверим шта се дешава!

* Лопиталова правила $\quad \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

$f,g : A \to \mathbb{R}$, a је тачка нагомилавања A, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, f, g диф на A

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ или $\pm\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\quad (*) \to$ уколико десна страна постоји.

3

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{ЛП}{\underset{(*)}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x^3)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos x} + x\cdot(-\sin x) - \cancel{\cos x}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}\sin x}{3x^{\cancel{2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+3)^{\frac{1}{a\log x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\log(2x+3)}{a\log x}}$, $\quad e^t$ непрекидна ф-ја по $t \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

$= e^{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\log(2x+3)}{a\log x}} = e^{1/a}$

g непр

$\lim\limits_{x\to \infty} g(\underbrace{f(x)}_{t}) = g(\lim\limits_{x\to \infty} f(x))$

$\lim\limits_{t\to \sqcup} g(t) = g(\lim\limits_{t\to \sqcup} t) = g(\sqcup)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\log(2x+3)}{a\log x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{ЛП}{\underset{(*)}{=}} \frac{1}{a} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{2x+3}\cdot 2}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{a} \underbrace{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{2x+3}}_{\to 1}$

$= \frac{1}{a}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\log\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{-\log(\cos x)} \overset{ЛП}{\underset{(*)}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{-\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{tg} x} = 2.$