f равн непр. на A ако

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x,y\in A \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

f није р.н. $\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x,y\in A \quad |x-y|<\delta \wedge |f(x)-f(y)|>\varepsilon$

f равн непр на $A \Rightarrow$ f непр. на A

$\not\Leftarrow$

Кантор: $A=[a,b]$, f непр на A $\Rightarrow$ f равн непр на A

Липшицовост: $f: A\to\mathbb{R}$ је Липшицова

$\exists L>0 \quad \forall x,y\in A \quad |f(x)-f(y)| \le L|x-y|.$

f Липшицова $\Rightarrow$ f равн непр

$\not\Leftarrow$

① f равн непр. $[a,b]$ и равн непр на $[b,c]$ $\Rightarrow$ f равн непр на $[a,c]$

— // — A — // — B, $A\cap B\neq\emptyset$ $\Rightarrow$ f равн непр на $A\cup B$

$A, B\subseteq\mathbb{R}$.

② Испитати равн непр ф-је f на скупу A.

а) $f(x)=\sqrt{x}$, $A=[0,+\infty)$

$x,y\in A$

$f(x)-f(y) = \sqrt{x}-\sqrt{y} = (\sqrt{x}-\sqrt{y})\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

$|f(x)-f(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{1}{2}|x-y|, \quad x,y\in[1,+\infty)$

$x,y\ge 1$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 2$

$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{1}{2}$

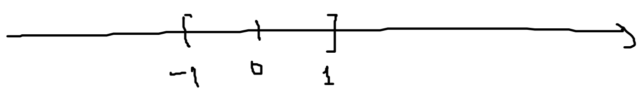
$\Rightarrow$ f Липшицова на $[1,+\infty)$

$\Rightarrow$ f равн непр на $[1,+\infty)$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ непр., $[0,1]$ затворен $\xRightarrow{\text{Кантор}}$ f равн непр.

$\Rightarrow$ f је равн непр на $[0,1]\cup[1,+\infty) = [0,+\infty)$.

б) $f(x)= x+\sin x$, $A=\mathbb{R}$



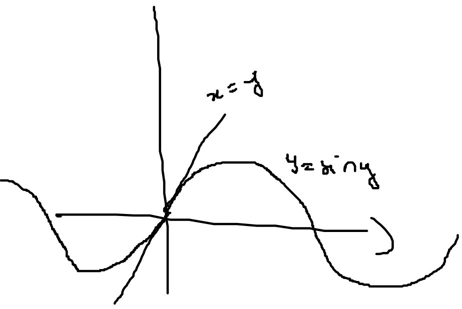
$x,y\in A$

$f(x)-f(y) = x+\sin x-(y+\sin y) = (x-y)+(\sin x-\sin y) =$

$= (x-y) + 2\sin\frac{x-y}{2}\underbrace{\cos\frac{x+y}{2}}_{\le 1}$

$|f(x)-f(y)| = \left|x-y+2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \le |x-y| + 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|$

$\le |x-y| + 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$

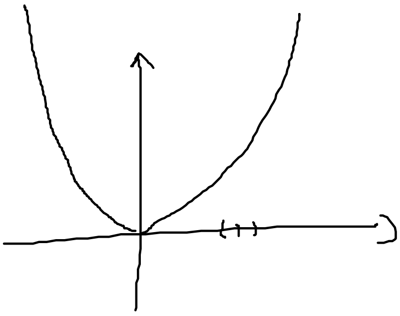


$$\leq |x-y| + 2\frac{|x-y|}{2} \leq 2|x-y|$$

$$|\sin t| \leq |t|$$

f је Липшицова $\Rightarrow$ f равн. непр.

б) $f(x) = x^2$, $A = \mathbb{R}$



интуитивно f највероб. није равн. непр.

$$f(x)-f(y) = x^2-y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$$

x_n, y_n

$$\lim_{n\to\infty} |x_n-y_n| = 0 \quad \text{и} \quad |f(x_n)-f(y_n)| \geq const > 0$$

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$x_n, y_n = ?$ $\qquad (x_n+y_n)\cdot(x_n-y_n) \geq const > 0$

$$(x_n+y_n)\cdot\frac{1}{n} \geq const > 0$$

$$x_n + y_n = n$$

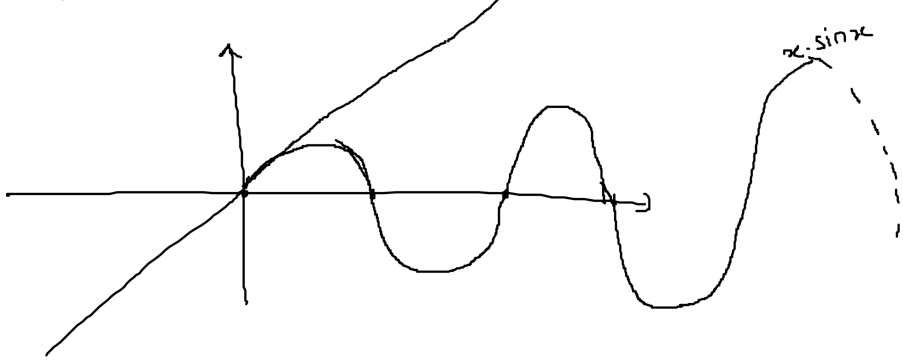
$$\Rightarrow f(x_n) - f(y_n) = n\cdot\frac{1}{n} = 1 = \varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l} x_n + y_n = n \\ x_n - y_n = \frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{n}\right) \\ y_n = \frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{n}\right). \end{array}$$

$\Rightarrow$ за $\varepsilon = 1$ $\forall \delta > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $|x_{n_0} - y_{n_0}| < \delta$ $\wedge$ $|f(x_{n_0}) - f(y_{n_0})| \geq 1$.

$\Rightarrow f$ није равн. непр.

г) $f(x) = x\sin x$, $A = [0, +\infty)$



$$f(x)-f(y) = x\sin x - y\sin y = x\sin x - y\sin x + y\sin x - y\sin y =$$

$$= (x-y)\sin x + y\cdot(\sin x - \sin y)$$

$$= (x-y)\cdot\sin x + \underbrace{y}_{\text{може бити произвољно велико}}\cdot 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$\Rightarrow$ највероб. ф-ја није равн. непр.

$x_n, y_n = ?$

$x_n - y_n \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) \ge const > 0$.

$x_n \sin x_n - y_n \sin y_n$

$y_n = 2n\pi$

$f(y_n) = 0$ $\qquad f(x_n) \ge const$ $\qquad$ Хоћемо

$a_n = x_n - 2n\pi \to 0$ $\nearrow$

$x_n = 2n\pi + a_n$, $a_n \to 0$

$|f(x_n)| = |(2n\pi + a_n)\cdot \sin(2n\pi + a_n)| = |(2n\pi + a_n)\cdot \sin a_n| \ge const$

Хоћемо

$\dots \le |\sin a_n| \le \dots$?

$\underbrace{2n\pi \cdot \sin a_n}_{\to 2\pi \ne 0} + \underbrace{a_n \cdot \sin a_n}_{\to 0}$

$\frac{\sin x}{x} = 1$, $x \to 0$

$n \sin a_n \to 1$ $\quad \boxed{a_n = \frac{1}{n}}$

$\frac{\sin a_n}{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \quad x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$, $\quad y_n = 2n\pi$

$x_n - y_n \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) \to 2\pi \ne 0$

$\varepsilon = 1 \quad \exists n_0 \quad \forall n \ge n_0 \quad |f(x_n) - f(y_n)| \ge 1$

$\Rightarrow \quad \forall \delta > 0 \ \exists m \ge n_0 \quad |x_m - y_m| < \delta$ и $|f(x_m) - f(y_m)| \ge 1$.

g) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $\quad A = (0, \pi)$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, \pi] \end{cases} \rightsquigarrow \text{непрекидна на } [0,\pi]$$

Кантор $\Rightarrow$ $\tilde{f}$ равн непр на $[0,\pi]$

$\Rightarrow$ $\underset{f}{\underset{\parallel}{\tilde{f}}}$ равн непр на $(0,\pi)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \underset{x,y \in A}{|x - y| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ ово важи и када $x, y \in B$ где је $\underline{B \subseteq A}$.

(2) f равн нейр на (a,b), $a,b\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A^{\in\mathbb{R}}$: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$?

f равн нейр на (a,b)

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad x,y\in(a,b)\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

Хајнеова теорема: $\forall x_n,\ x_n\to a^+ \Rightarrow f(x_n)\to A$.

$x_n\in(a,b)$ $x_n\to a$ произвољно $\Rightarrow$ x_n конвергира $\Rightarrow$ x_n Кошијев

$\forall\delta>0\ \exists n_0\ \forall n,m\geq n_0\ |x_n-x_m|<\delta$

$\Downarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \Rightarrow \underbrace{\exists n_0\quad n,m\geq n_0\ |x_n-x_m|<\delta}\ \Rightarrow |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$

f равн нейр.

$f(x_n)$ Кошијев

$\Downarrow$

$f(x_n)$ конвергентан

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Да ли је ово A исто за свако $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$f(y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} B$, $x_n\to a^+$ $\quad \forall\delta>0\ \underline{\underline{\exists}}\ n_0, m_0\in\mathbb{N}\quad n\geq \max\{n_0,m_0\}$

$f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} A$ $\quad y_n\to a^+$

$0<x_n-a<\delta/2$

$0<y_n-a<\delta/2$

$\underline{\underline{|x_n-y_n|<\delta}}$

равн нейр. $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta: \exists n_0\ |x_n-y_n|<\delta \Rightarrow \underline{\underline{n\geq n_0}}\ |f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$ $\big/\lim\limits_{n\to\infty}$

$n\geq n_0$

$|A-B|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ |A-B|\leq\varepsilon \Rightarrow A=B$.

Хајне

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$.

(3) $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ нейр, $\underbrace{\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\in\mathbb{R}}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ f равн нейр. на $[a,+\infty)$.

$\not\Leftarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A\in\mathbb{R}$

$\Downarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon)>0,\ x>M \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$,

$x,y>M \Rightarrow |f(x)-f(y)|<2\varepsilon$

f равн непр?

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$M(\frac{\varepsilon}{2})>0 \qquad x,y > M(\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$x,y \in [a, M(\frac{\varepsilon}{2})+1] \underset{\text{Кантор}}{\Rightarrow}$ f равн непр на $[a, M(\frac{\varepsilon}{2})+1]$

$\Rightarrow \exists \delta_1>0 \Rightarrow |x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Downarrow$

$x,y \in [a, M(\frac{\varepsilon}{2})+1]$

$\delta = \min\{\delta_1, 1\} \Rightarrow \forall x,y \in [a,+\infty) \quad |x-y|<\delta \Rightarrow x,y \in [a, M(\frac{\varepsilon}{2})+1] \ \vee \ x,y \in (M(\frac{\varepsilon}{2}),+\infty)$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$ ✓

$\Rightarrow$ f равн непр на $[a,+\infty)$.

4) Испитати равн непр ф-је:

а) $f(x) = \dfrac{x-2}{3x-4}, \quad A=[0,\frac{4}{3})$

$\lim\limits_{x\to \frac{4}{3}^-} f(x) = +\infty \overset{(2)}{\Rightarrow}$ f није равн непр.

б) $f(x) = \dfrac{x-2}{3x-4}, \quad A=(-\infty,0]$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-2}{3x-4} = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f равн непр на A

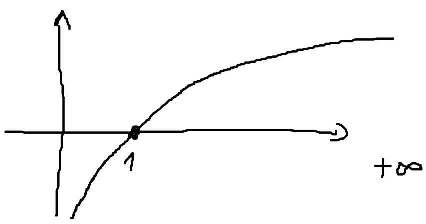
в) $f(x) = \ln x, \quad A=(0,1)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ f није равн непр на A

г) $f(x) = \ln x, \quad A=(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ не знамо ништа

$x,y>1: \quad \ln x - \ln y = \ln \dfrac{x}{y}$



$0 < x-y < \delta$

$x < y+\delta \Rightarrow \underbrace{\ln x - \ln y}_{\ln \frac{x}{y}} < \ln \dfrac{y+\delta}{y} \quad / \ln \uparrow$

$= \ln(1+\dfrac{\delta}{y}) \to 0, \ \delta \to 0$ јер $y>1$

највероб. ln равн непр ф-ја.

$\ln(1+x) = x + o(x) = x + \underset{\downarrow \atop 0}{\alpha(x)} \cdot x \quad , x \to 0$

$\ln(1+x) \leq x \quad , \quad x \geq -1$

$x, y > 1 \to |\ln x - \ln y| = \left|\ln \frac{x}{y}\right| = \left|\ln\left(1 + \frac{x-y}{y}\right)\right| \leq \left|\frac{x-y}{y}\right| \underset{\downarrow \atop y>1}{\leq} |x-y|$

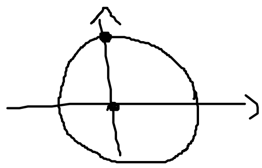
$\ln x$ Липшицова на $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$ $\ln x$ равн непр. на $(1, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0$

$\Big\} \Rightarrow \ln x$ равн непр на $[1, +\infty)$.

g) $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} \quad , \quad A = (0, \pi)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ не постоји $\Rightarrow$ f није равн непр.



$x_n , y_n \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x_n}, \frac{1}{y_n} \to +\infty$

$f(x_n) \to A$

$f(y_n) \to B^{\neq}$

$\cos \frac{1}{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cos \frac{1}{y_n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y_n} = 2n\pi$

$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0^+ \qquad f(x_n) = e^{\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \cdot \cos \frac{1}{x_n} = 0$

$\ast$

$y_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0^+ \qquad f(y_n) = e^{\frac{1}{2n\pi}} \cos \frac{1}{y_n} = e^{\frac{1}{2n\pi}} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow$ не постоји $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.