* Релације

X, Y скупови

$\rho \subseteq X \times Y$, $\rho \neq \emptyset$ – бинарна релација из X у Y

$(x,y) \in \rho$ – „x је у релацији (ρ) са y"

$\Updownarrow$

$x \rho y$

Ако је $\rho \subseteq X \times X$ кажемо да је ρ релација на скупу X.

$|X| = n$ (X има n елемената)

Колико имамо релација на скупу X ?

$|X \times X| = n^2$ $\qquad$ ρ - нека релација $\rho \subseteq X \times X$

$\rotatebox{90}{$\in$}$ $\qquad$ $\rho \in \mathcal{P}(X \times X)$

(x_1, x_2)

$\uparrow \ \uparrow$

$n \ \ n$

$|A| = k$ $\quad$ $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ $\qquad$ $\{\overset{\overset{2}{\uparrow}}{a_1}, \overset{\overset{2}{\uparrow}}{\ldots}, \overset{\overset{2}{\uparrow}}{a_k}\} = A$

$|\mathcal{P}(A)| = 2^k$ $\qquad$ B или садржи a_i или га не садржи

$\forall i \in \{1,..,k\}$ имамо 2 могућности за a_i

$\Rightarrow$ Различитих релација на скупу X има $|\mathcal{P}(X \times X)| \underbrace{-1}_{\text{избацујемо } \emptyset} = 2^{n^2} - 1$

$\rho \subseteq X \times X$

Особине: (Р) – рефлексивност $\forall x \in X \quad x \rho x$

(С) – симетричност $\forall x,y \in X \quad x \rho y \Rightarrow y \rho x$

(АС) – антисиметричност $\forall x,y \in X \quad x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

(Т) – транзитивност $\forall x,y,z \in X \quad x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

(Р) + (С) + (Т) $\Rightarrow$ релација еквиваленције

„=" на $\mathbb{R}$ – релација еквив. → али за „=" важи (АС)

паралелност прави

подударност троугла

(Р) + (АС) + (Т) $\Rightarrow$ релација поретка

„=" на $\mathbb{R}$ – релација поретка

„≤" на $\mathbb{R}$ – релација тоталног поретка

$\subseteq$ на $\mathcal{P}(X)$, X неки скуп – ако $|X| = 1$ јесте рел. тот. поретка
иначе је само рел. поретка

$|$ на $\mathbb{N}$ (деливост) – рел. поретка (али не тоталног) $2 \nmid 3$ и $3 \nmid 2$

$|$ на $\mathbb{Z}$ није рел. поретка јер $-1 \mid 1$ и $1 \mid -1$ али $-1 \neq 1$.

- Уколико је ρ релација поретка на скупу X и за свако $x, y \in X$ важи $x \rho y$ или $y \rho x$ онда ρ називамо релацијом тоталног (линеарног) поретка.

Колико имамо рел. еквив. на скупу X, ако $|X| = n$?

① $m \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{Z}$: $x \equiv y \pmod{m} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = k \cdot m$

Показати да је овако задата рел. еквив. на $\mathbb{Z}$.

Ⓟ $x \in \mathbb{Z}$ произвољно

$x \equiv x \pmod{m}$? ✓

$x - x = 0 = 0 \cdot m \Rightarrow k = 0$

Ⓒ Нека су $x, y \in \mathbb{Z}$ произвољни такви да $x \equiv y \pmod{m}$, показујемо да је $y \equiv x \pmod{m}$.

$x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x - y = k \cdot m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad y - x = -k \cdot m$

$\Rightarrow y \equiv x \pmod{m}$

Ⓣ Нека су $x, y, z \in \mathbb{Z}$ произвољни такви да $x \equiv y \pmod{m}$ и $y \equiv z \pmod{m}$

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad x - y = k_1 \cdot m \\ y \equiv z \pmod{m} \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad y - z = k_2 \cdot m \end{array}\right\} \Rightarrow x - z = (\underbrace{k_1 + k_2}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot m$$

$\Rightarrow x \equiv z \pmod{m}$

Како важе особине Ⓟ, Ⓒ и Ⓣ наша релација је релација еквив.

- ρ − релација еквив. на скупу X

$[\underset{\underset{X}{\uparrow}}{x}] = \{ y \in X \mid x \rho y \}$ − класа еквиваленције елемента x.

$x \in [x]$

$z \in X \land z \rho x \Rightarrow [z] = [x]$

$y \in [z]$ произвољно

$$\left.\begin{array}{l} \iff z \rho y \\ z \rho x \underset{Ⓒ}{\Rightarrow} x \rho z \end{array}\right\} \overset{Ⓣ}{\Rightarrow} x \rho y \Rightarrow y \in [x].$$

$[z] \subseteq [x]$.

„$\supseteq$"

$z \in X \land \underset{\underset{\text{z и x нису у релацији}}{\downarrow}}{\neg}(z \rho x) \Rightarrow [z] \cap [x] = \emptyset$

↓ Прет. супротно да $[z]\cap[x]\neq\emptyset$, онда постоји $y\in X$, $[z]\cap[x]\ni y$.

$$\left.\begin{array}{l} y\in[z] \Rightarrow z\rho y \\ y\in[x] \Rightarrow x\rho y \underset{ⓒ}{\Rightarrow} y\rho x \end{array}\right\}\overset{ⓣ}{\Rightarrow} z\rho x$$ ↯ (у контрадикцији) са $\neg(z\rho x)$.

Дакле, $[z]\cap[x]=\emptyset$.

-- - -- -

вратимо се на задатак

$x=1 \quad [1]=\{y\in\mathbb{Z} \mid 1\equiv y \pmod{m}\}=\{l\cdot m+1 \mid l\in\mathbb{Z}\}$

$$1-y=km,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$y=1-km,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$l=-k\in\mathbb{Z} \quad y=lm+1$$

$a\in\mathbb{Z}$ $\quad [a]=\{l\cdot m+a \mid l\in\mathbb{Z}\}$

довољно $0\leq a<m$

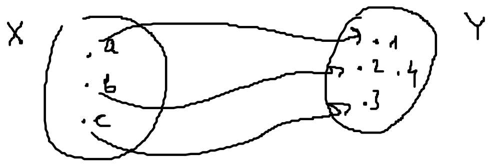
* Функције

$f\subseteq X\times Y$ је фја из X у Y $(f: X\to Y)$ ако за свако $x\in X$ постоји $y\in Y$ тд $(x,y)\in f$ и ако $(x,y_1)\in f$ и $(x,y_2)\in f$ онда $y_1=y_2$.

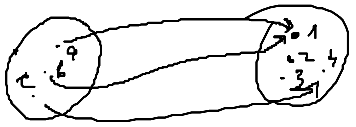
$$\boxed{\begin{array}{ll} (\forall x\in X)(\exists y\in Y) & (x,y)\in f \\ (x,y_1),(x,y_2)\in f \Rightarrow & y_1=y_2 \end{array}}$$ → пишемо $f(x)=y$.

X-домен фје f, Y - кодомен фје f

- f је инјективна (f је 1-1) $\quad \forall x_1,x_2\in X \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

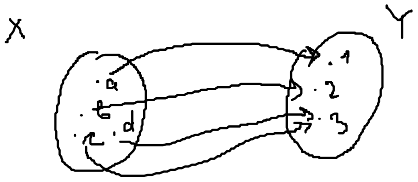


f 1-1

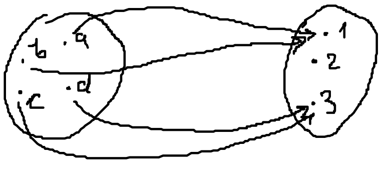


f није 1-1 јер $f(a)=f(b)=1$

- f је сурјективна (f је НА) $\quad \forall y\in Y \ \exists x\in X \quad f(x)=y$



f је НА



f није НА јер за $y=2$ не постоји елемент из X који се у њега слика.

- f је бијективна уколико је инјективна и сурјективна

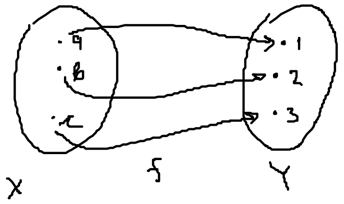
Да би f било 1-1 пре свега $|X| \leq |Y|$.

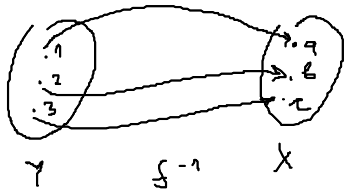
Да би f било НА, $|Y| \leq |X|$.

Да би f било бијекција мора да $|X| = |Y|$.

f бијективна $\Rightarrow \exists f^{-1}$ инверз ф-је f

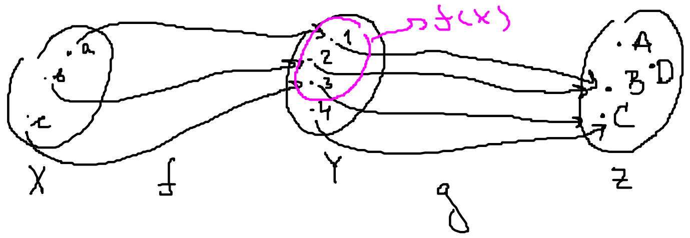
$f(x) = y$ $\qquad$ $f^{-1}(y) = x$

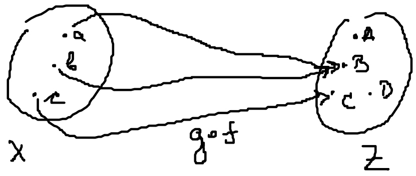




$f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$

$g \circ f : X \rightarrow Z$





Када је $g \circ f$ 1-1?

- f мора да буде 1-1 на X
- g мора да буде 1-1 на $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$

Када је $g \circ f$ НА?

- $g|_{f(X)} : f(X) \rightarrow Z$ НА.

↓

рестрикција ф-је g на скуп $f(X)$

$g \circ f$ НА $\Rightarrow g$ НА

$g \circ f$ 1-1 $\Rightarrow f$ 1-1

$$\left.\begin{array}{l} f: X \rightarrow Y \text{ 1-1}, \quad g_1, g_2 : Z \rightarrow X \\ f \circ g_1 = f \circ g_2 \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 = g_2 \qquad \left[Z \underset{g_2}{\underset{g_1}{\longrightarrow}} X \underset{f}{\longrightarrow} Y \right]$$

$\forall z \in Z \qquad f(g_1(z)) = f(g_2(z)) \Rightarrow \forall z \in Z \quad \underline{\underline{g_1(z) = g_2(z)}}$

$\Rightarrow g_1 = g_2$

$$\left.\begin{array}{l} f : X \to Y \text{ HA} \;,\; g_1, g_2 : Y \to Z \\ g_1 \circ f = g_2 \circ f \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 = g_2$$

$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad f(x) = y$

$\Rightarrow \quad g_1 \circ f(x) = g_2 \circ f(x)$

$g_1(\underbrace{f(x)}_{y}) = g_2(\underbrace{f(x)}_{y})$

$\forall y \in Y \quad g_1(y) = g_2(y)$.