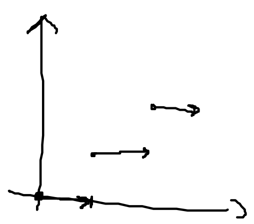
Непрекидност

- $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, f непрекидна у тачки a ако
  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \ \ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$\Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$\Longleftrightarrow \quad \forall x_n$ низ у A $\quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

- $f, g: A \to \mathbb{R}$ непр у тачки a $\Rightarrow$ $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ непр у a
- $f: A \to \mathbb{R}$, $g: f(A) \to \mathbb{R}$, f непр у a, g непр у $f(a)$ онда је $g \circ f$ непр у a.
- f је непр. слева у a ако $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$
- f је непр здесна у a ако $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- f непр. у a ако $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$
- прекид I врсте је отклоњив прекид, дакле фју можемо да додефинишемо у тачки a на следећи начин
  $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), & x = a. \end{cases}$$
  a ↓ тачка прекида
- прекид II врсте је неотклоњив прекид, тј. $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- f је непрекидна на A, уколико је непр. у свакој тачки $a \in A$.
- основне фје су непрекидне, а то су: x^n, $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, $\operatorname{arctg} x, \arcsin x, \dots$
  a^x, $\log x$, ...

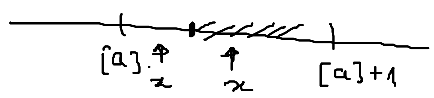


$[x]$, $x \in \mathbb{R}$

$[x]$ има прекид II врсте у сваком целом броју

$\lim\limits_{x \to a^+} [x] = [a]$

$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$



$[x] = [a]$ ✓ $\quad \lim\limits_{x \to a} [x] = [a]$

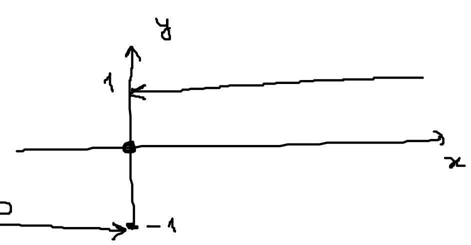
$a \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \to a^-} [x] = a - 1$

$\lim\limits_{x \to a^+} [x] = a = [a]$

$[x]$ је непрекидна здесна.

- $\operatorname{sgn} x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

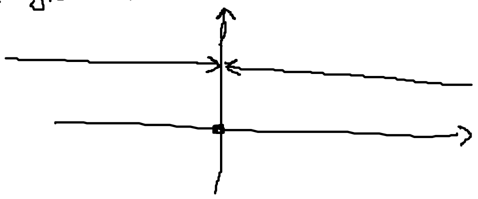


$x < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn} x = -1$, $\quad x = 0 \quad \operatorname{sgn} x = 0$

$x > 0 \quad \operatorname{sgn} x = 1$

има прекид II врсте у $x = 0$

$|\operatorname{sgn} x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ прекид I врсте у $x=0$



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} |\operatorname{sgn} x| & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} = 1 .$$

- $\frac{\sin x}{x} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\sin x}{x}$ је непрекидна на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ \underline{\underline{a}} & , x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ непр у $0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = a$

$\Rightarrow a = 1 .$

$\tilde{f}$ непрекидно на $\mathbb{R}$

- $\sin \frac{1}{x} : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

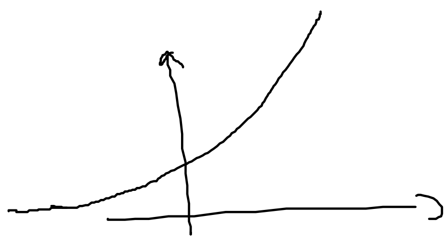
$\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \Rightarrow \sin\frac{1}{x}$ не можемо да додефинишемо у 0 тд $\tilde{f}$ буде непрекидна.

(1) Испитати непрекидност ф-ја на њиховом домену.

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} & , x \neq 1 \\ b & , x = 1 \end{cases}$

домен ф-је f је $\mathbb{R}$.

за $x \neq 1 : f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ ово је непрекидно на $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ као композиција основних ф-ја



за $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}} = 0$ $\quad \left(\frac{1}{x-1} \to +\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to 0}} = 1$ $\quad \left(\frac{1}{x-1} \to -\infty\right)$

f има прекид II врсте у 1.

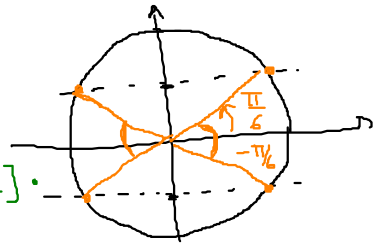
$b \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \Rightarrow f$ није непр ни слева, ни здесна у 1

$b = 0 \Rightarrow f$ непрекидна здесна

$b = 1 \Rightarrow f$ непрекидна слева.

8) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+\underbrace{(2\sin x)^{2n}}_{\geq 0}}$ $\Rightarrow$ домен фје f је $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+(4\sin^2 x)^n}$$



$$\lim_{n\to\infty}(\underbrace{4\sin^2 x}_{\geq 0})^n=\begin{cases}0, & 4\sin^2 x<1 \iff \sin x\in\left(-\frac12,\frac12\right)\\ 1, & 4\sin^2 x=1 \iff \sin x=\left\{\frac12,-\frac12\right\}\\ +\infty, & 4\sin^2 x>1 \iff \sin x\in\left[-1,-\frac12\right)\cup\left(\frac12,1\right]\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0, & |a|<1\\ 1, & a=1\\ +\infty, & a>1\\ \text{не постоји}, & a\leq -1\end{cases}$$

$x\in\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)\cup\left(-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

$=\left\{\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

$x\in\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\cup\left(\frac{5}{6}\pi+2k\pi,\frac{7\pi}{6}+2k\pi\right)$

$x\in\underbrace{\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}}_{A}$

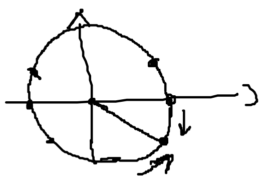
$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left\{\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}=B\\ \frac{x}{2}, & x\in\left\{-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}, k\in\mathbb{Z}\\ 0, & x\in\left\{\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}=C\end{cases}$$

B, C су уније отворених интервала, f непрекидно на $B\cup C$.

(јер свака тачка отвореног интервала има околину која се налази у том интервалу)

Дакле, потребно је проверити шта се дешава у крајњим тачкама тих интервала, тј. на скупу A ј су изоловане тачке

1° $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\in A$, $k\in\mathbb{Z}$



$k=2n$

$a=-\frac{\pi}{6}+2n\pi$

$x<a$, $x\to a$, $x\in C$

$f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=0\neq f(a)=\frac{a}{2}=-\frac{\pi}{12}+n\pi$

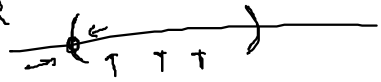
$x>a$, $x\to a$, $x\in B$

$f(x)=x$

$\lim\limits_{x\to a^+}\underbrace{f(x)}_{=x}=a\neq f(a)=\frac{a}{2}$, јер $a\neq 0$

у a имамо прекид II врсте и f није непр ни слева ни здесна у a.

За вежбу проверити остале тачке из A.

в) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}\cdot\dfrac{e^{-nx}}{e^{-nx}} \Rightarrow$ домен од f је $\mathbb{R}$  $f=e^{\sin\frac{1}{x^2}}\cdots$

$$\lim_{n\to\infty}e^{nx}=\begin{cases}+\infty, & x>0\\ 1 & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{-nx}+x^2}{e^{-nx}+1}, & x>0\\ 0, & x=0\\ x, & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ x, & x<0\end{cases}$$

f је непрекидна за $x\neq 0$ јер је на <u>отвореном</u> интервалу $(-\infty,0)$ $f(x)=x$ што је непрекидно и на <u>отвореном</u> интервалу $(0,+\infty)$ $f(x)=x^2$ непр.

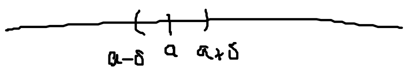
Шта се дешава у $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0=f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0=f(0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)\Rightarrow f$ је непрекидна у 0.

г) $\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ Дирихлеова фја.

$a\in\mathbb{R}$ 

$\Rightarrow \exists x_n\in\mathbb{Q},\ \exists y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$

$\lim\limits_{n\to\infty}\overset{=1}{f(x_n)}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\overset{=0}{f(y_n)}=0$

$\nexists \lim\limits_{x\to a}f(x)$ по Хајнеовој теореми!

$\Rightarrow f$ има прекид II врсте у свакој тачки свог домена.

д) $f(x)=x\cdot\chi(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

$a\in\mathbb{R}$

$x_n\in\mathbb{Q}$ $x_n\to a$ $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ $\Rightarrow$ за $a\neq 0$ имамо прекид II врсте

$y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $y_n\to a$ $\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$

$a=0$: $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)=0.$ $\not\Rightarrow f$ непр у a

x_n и y_n нису произвољни па не можемо искористити Хајнеову теорему.

деф непр. у 0 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\ |x-0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ произвољан $\delta = ?$ тд $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\quad |x| < \delta \Rightarrow |0 - 0| = 0 < \varepsilon$ ✓

$x \in \mathbb{Q}$ $\quad |x| < \delta \Rightarrow \underbrace{|x - 0|}_{= |x|} < \varepsilon$

$\delta = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|x| < \varepsilon}_{\delta} \Rightarrow |x| < \varepsilon$ ✓

$\Rightarrow f$ је непрекидна у 0.

(2) Одредити $a, b, c \in \mathbb{R}$ тд је f непр на $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \leq -2 \\ x^2 + b, & -2 < x \leq 3 \\ e^x + c, & 3 < x \leq 5 \\ x^2 + 2x + 7, & x > 5 \end{cases}$$

f непр на $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, 5) \cup (5, +\infty)$.

$\boxed{-2}$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ јер f непрекидна слева

$\boxed{3}$

$\boxed{5}$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = ?$

хоћемо

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} x^2 + b = 4 + b \overset{\downarrow}{=} f(-2) = -4 + a$$

$$a - b = 8$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} e^x + c = e^3 + c = f(3) = 9 + b$$

$$b - c = e^3 - 9$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} x^2 + 2x + 7 = 42 = e^5 + c$$

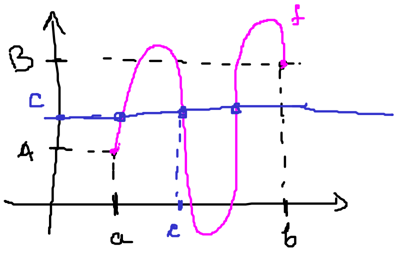
$$\boxed{\begin{aligned} c &= 42 - e^5 \\ b &= 33 - e^5 + e^3 \\ a &= 41 - e^5 + e^3 \end{aligned}}$$

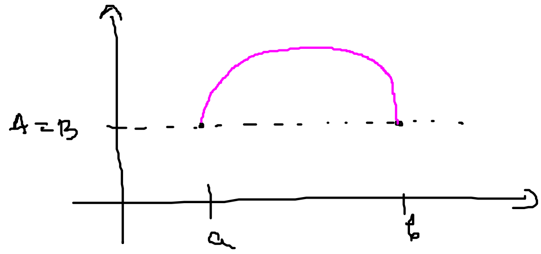
Т. [Вајерштрас] $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непр $\Rightarrow$ f ограничена на $[a, b]$ и постоји $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(c),\ c \in [a, b]$

$\max\limits_{x \in [a,b]} f(x) = f(d),\ d \in [a, b]$.

Т. [Болцано - Коши] $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна и $f(a) = A$, $f(b) = B$

$\Rightarrow \forall C \in [\overleftrightarrow{A, B}]\ \exists c \in [a, b]\quad f(c) = C$.





(3) $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ непрекидна и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ ограничена на $[a,+\infty)$.

— — —

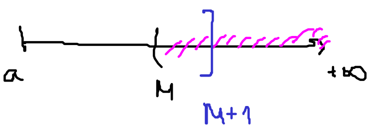
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M>0\quad x\in(M,+\infty)\Rightarrow |f(x)-k|<\varepsilon$

$\underline{f(x)\in(k-\varepsilon,k+\varepsilon)}$

$\Rightarrow f$ је огран на $(M,+\infty)$ јер је $f(x)\in(k-\varepsilon,k+\varepsilon)$, $x\in(M,+\infty)$

узмимо $\varepsilon=1$, M

$x>M \Rightarrow f(x)\in(k-1,k+1)$

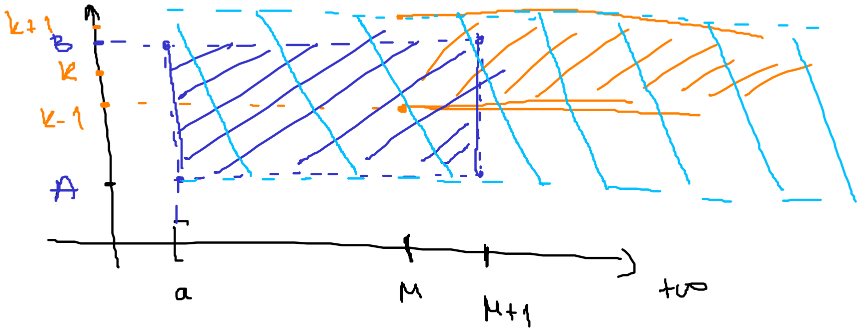


$f:[a,M+1]\to\mathbb{R}$ непрекидна

Вајерштрас $\Rightarrow f$ огран на $[a,M+1]$

$\exists A,B\quad f(x)\in[A,B]$, $x\in[a,M+1]$

$x\in[a,+\infty) \Rightarrow f(x)\in[\min(A,k-1), \max(B,k+1)] \Rightarrow f$ ограничено на $[A,B]$.



(4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна и огран ф-ја.

Доказати да $\exists x\in\mathbb{R}\quad f(x)=x^3$.

— — —

$f(x)\in[A,B]$

Т. Болцано-Коши: $f(a)=A_1$, $f(b)=B_1$, $a<b$, f непр, $\forall c\in[A_1,B_1]\ \exists c\in[a,b] : f(c)=C$.

$g(x)=f(x)-x^3$? $\exists c\in\mathbb{R}\ g(c)=0 \Leftrightarrow f(c)=c^3$?

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрекидна јер f и x^3 непр.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x^3 = -\infty$

$\downarrow$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $\downarrow$

$\exists\, a < 0 \quad g(a) > 0 \qquad\qquad\qquad \exists\, b > 0 \quad g(b) < 0$

$a < b$

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрекидна

$g(a) = A_1 > 0 \quad , \quad g(b) = B_1 < 0$

Болцано-Коши $\Rightarrow$ $\forall\, C \in [\underset{\wedge 0}{B_1}, \underset{\vee 0}{A_1}] \quad \exists\, c \in [a, b] \quad g(c) = C$

$\Rightarrow C = 0 \quad \Rightarrow \exists\, c_0 \in [a, b] \quad g(c_0) = 0$

$f(c_0) - c_0^3 = 0 \quad \Rightarrow f(c_0) = c_0^3 .$