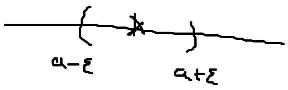
Граничне вредности ф-ја

$a\in\overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon>0$ $\quad V(a,\varepsilon)=\begin{cases}(a-\varepsilon,a+\varepsilon), & a\in\mathbb{R}\\ (\varepsilon,+\infty), & a=+\infty\\ (-\infty,-\varepsilon), & a=-\infty\end{cases}$ – околина тачке a

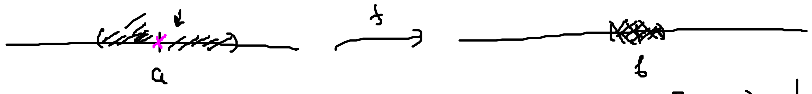
$\mathring{V}(a,\varepsilon)=V(a,\varepsilon)\setminus\{a\}$ – пробушена околина



$V^{\times}$

· a је тачка нагомилавања скупа A ако $\forall\varepsilon>0\ \exists x\in A\ \ x\in\mathring{V}(a,\varepsilon)$.

· $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$: $f: A\to\mathbb{R}$, a тачка нагомилавања скупа A, $b\in\overline{\mathbb{R}}$ је гр. вр. ф-је f када $x\to a$ ако
$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \ x\in A\cap\mathring{V}(a,\delta)\Rightarrow f(x)\in V(b,\varepsilon)$.



$a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ $\quad \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in A\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm g(x)\overset{\circledast}{=} b\pm c$, $\quad \circledast$ → уколико десна страна постоји

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)\overset{\circledast}{=} b\cdot c$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\overset{\circledast}{=}\dfrac{b}{c}$, $c\neq 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b} g(y)=c$

$\boxed{\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x)=c}$

Лимес је јединствен уколико постоји.

Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\in\mathbb{R}$ онда постоји околина тачке a на којој је f ограничен.

Хајне теорема: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \iff \forall(x_n):\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=b$.

десни лимес: $\lim\limits_{\substack{x\to a^+\\ a+0}} f(x)=f_+(a)$: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in A\ \ 0<x-a<\delta \Rightarrow f(x)\in V(f_+(a),\varepsilon)$

леви лимес: $\lim\limits_{\substack{x\to a^-\\ a-0}} f(x)=f_-(a)$: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in A\ \ 0<a-x<\delta \Rightarrow f(x)\in V(f_-(a),\varepsilon)$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b \iff f_+(a)=f_-(a)=b}$$

1° $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{\underset{\downarrow 1}{\cos x}\cdot x}}_{\to1}=1;\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x/2}{4\cdot\frac{x^2}{4}}\underset{\to1}{}=\frac{1}{2}$$

2° $$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$a=e \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

3° $$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$a=e \Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad a^x=e^{x\ln a}=\left(e^{\ln a}\right)^x=a^x$$

4° $$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

5° $$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

— - - - -

① Одредити границу вредности:

а) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{5\cdot\underbrace{\frac{\sin5x}{5x}}_{\to1}-3\cdot\underbrace{\frac{\sin3x}{3x}}_{\to1}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to1}}=\frac{5-3}{1}=2.$$

б) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\overbrace{\cos\frac{x+a}{2}}^{\to\cos a}}{\frac{x-a}{2}\cdot2}\underset{\to1}{}=\cos a$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{e^{xa}-e^{xb}}{x}=\lim_{x\to0}\underbrace{e^{xb}}_{\to1}\underbrace{\frac{e^{x(a-b)}-1}{x\cdot(a-b)}}_{\to1}\cdot(a-b)=a-b$$

г) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\overset{\nearrow1}{\sqrt[m]{\cos ax}}-1}{x^2}-\frac{\sqrt[n]{\cos bx}-1}{x^2}=$$

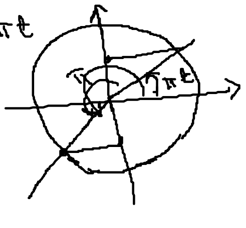
$$=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\left(\overset{\nearrow0}{(\cos ax-1)}+1\right)^{1/m}-1}{\cos ax-1}}_{\to\frac{1}{m}}\cdot\underbrace{\frac{\cos ax-1}{a^2x^2}}_{\to-\frac{1}{2}}\cdot a^2-\underbrace{\frac{\left((\cos bx-1)+1\right)^{1/n}-1}{\cos bx-1}}_{\to\frac{1}{n}}\cdot\underbrace{\frac{\cos bx-1}{b^2x^2}}_{\to-1/2}\cdot b^2=$$

$$=-\frac{a^2}{2m}+\frac{b^2}{2n}.$$

д) $$\lim_{x\to0}\left(\overset{\nearrow1}{\cos x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to0}\underbrace{\left(\left(1+\underset{\to0}{(\cos x-1)}\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right)}_{\to e}^{\underbrace{\frac{\cos x-1}{x^2}}_{\to-1/2}\cdot x\ \to0}=e^0=1.$$

$\sin\pi(t+1)=-\sin\pi t$

$\Leftarrow$



ђ) $$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}=\left\lceil\begin{matrix}x=1+t\\t\to0\end{matrix}\right\rfloor=\lim_{t\to0}\frac{1-(1+t)^2}{\sin\pi(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{-2t-t^2}{-\sin\pi t}\cdot\frac{(-1)}{(-1)}=$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t+t^2}{\sin \pi t} \cdot \frac{\pi t}{\pi t} = \frac{2}{\pi} .$$

$\downarrow 1$ $\quad \searrow \frac{2}{\pi}$

е) $$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\nearrow 0}{a_n x^n} + \overset{\nearrow 0}{a_{n-1} x^{n-1}} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{a_0}{b_0} , \quad b_0 \neq 0$$

ж) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} , & n = m \\ +\infty , & n > m \\ 0 , & n < m \end{cases}$$

$\frac{1}{2} \quad (\sqrt{} = (\ )^{1/2})$

3) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+a^2} + x}{\sqrt{x^2+b^2} + x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+(\frac{a}{x})^2} + x}{-x\sqrt{1+(\frac{b}{x})^2} + x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - \sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}{1 - \sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}} \cdot \frac{(-1)\cdot \frac{a^2/\cancel{x^2}}{a^2/x^2}}{(-1)\, \frac{b^2/\cancel{x^2}}{b^2/x^2}} = \frac{a^2}{b^2}$$

$\downarrow \frac{1}{2}$

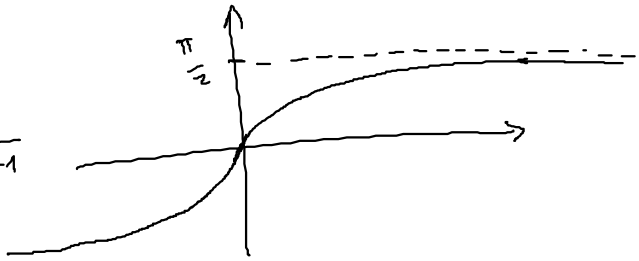
② Да ли постоје границе ?

а) $$\lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \left[t = 1-x \atop t\to 0 \right] = \lim_{t\to 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$$

$\neq$

$$\lim_{t\to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}$$

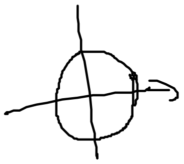


б) $$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

$\Gamma\ x_n = \frac{1}{n}$ $\quad \sin \frac{1}{x_n} = \sin n \Leftarrow \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x_n}$ не постоји $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ не постоји

x_n , y_n , $x_n , y_n \to 0 \ n\to\infty$

$$\sin \frac{1}{x_n} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} = n\pi \Rightarrow x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0 , n\to\infty$$



$$\sin \frac{1}{y_n} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y_n} = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0 , n\to +\infty$$

Хајне $\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$.

в) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{1/x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\underset{\searrow +\infty}{e^{\overset{\searrow +\infty}{1/x}}}} = 0 \neq \lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+\underset{\downarrow 0}{e^{\overset{\searrow -\infty}{1/x}}}} = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x\to0}\frac{1}{1+e^{1/x}}.$$

i) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}}_{\to e}{}^{\cdot\overset{\nearrow 2a}{\frac{x\cdot 2a}{x-a}}} = e^{2a}$$

g) $$\lim_{x\to1}\frac{(1+x)^{x}-2}{x-1} = \left\lceil \begin{matrix} x=1+t \\ t=x-1 \end{matrix}\right\rfloor = \lim_{t\to0}\frac{(2+t)^{1+t}-2}{t} =$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{(2+t)\cdot(2+t)^{t}-2}{t} = \lim_{t\to0}\frac{2\cdot(2+t)^{t}-2}{t} + \frac{\cancel{t}\cdot(2+t)^{t}}{\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t\to0} 2\left(\frac{(2+t)^{t}-1}{t}\right) + \underset{\searrow 1}{(2+t)^{t}} = 2\ln2+1.$$

$$\ulcorner \lim_{t\to0}\frac{(2+t)^{t}-1}{t} = \lim_{t\to0}\underset{\downarrow 1}{\frac{e^{\overset{\to 0}{t\cdot\ln(2+t)}}-1}{t\cdot\ln(2+t)}}\cdot\underset{\downarrow \ln2}{\ln(2+t)} = \ln2 \lrcorner$$