Анализа 1 - вежбе

Душица Дмитровић

Лашко - збирка зад. из Анализа 1

рокови
предавања
вежбе
практикуми

1. начин

писмени 60 — I колоквијум 30, II колоквијум 30
усмени 40

2. начин

писмени испит

· Консултације се заказују мејлом.

* Скупови

$A = \{ x \mid P(x) \}$ x задовољава својство $P \to P(x)$

$x \in A$ „x припада A" ако x задовољава својство P

$x \notin A$ „x не припада A"

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \ldots, \{1,2,3\}, \{1, a, b\}$

$A = B \iff (\forall x) \; (x \in A \iff x \in B)$

за свако

ако и само ако

акко

$A \subseteq B \iff (\forall x) \; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

онда

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

и

$\emptyset$ - празан скуп $\quad \emptyset = \{ x \mid x \neq x \}$

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

$A^c = \{ x \in U \mid x \notin A \}$, где је $A \subseteq U$, U окружење скупа A

$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_k, \; 1 \leq k \leq n, \; k \in \mathbb{N} \}$

$\mathcal{P}(A) = \{ X \mid X \subseteq A \}$ - партитивни скуп скупа A

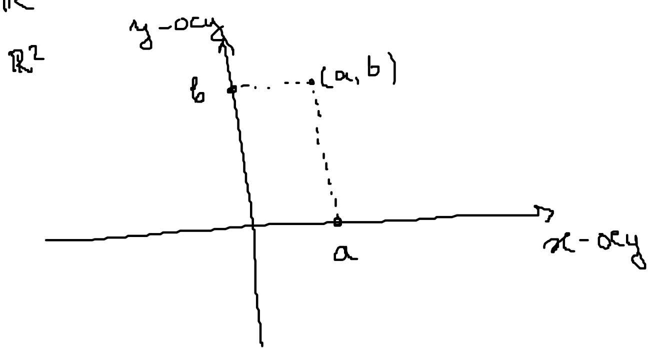
$\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

① $A = \{ (x,y) \in \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\mathbb{R}^2} \mid \underbrace{|x|+|y|<1}_{P((x,y))} \}$, $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}<1\}$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ $\qquad C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x+y|<\sqrt{2}\}$

Доказати да је $A\subseteq B\subseteq C$.

$|x| = \begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$, $x\in\mathbb{R}$

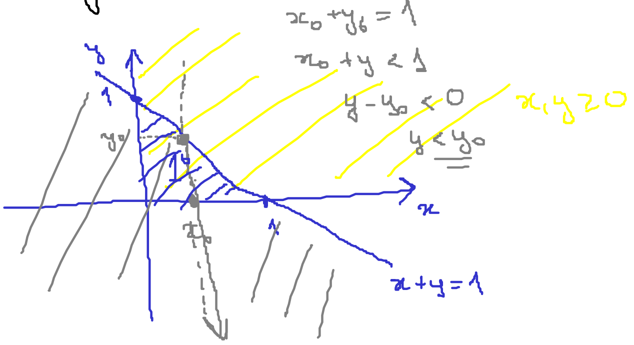


Скицирамо скуп A:

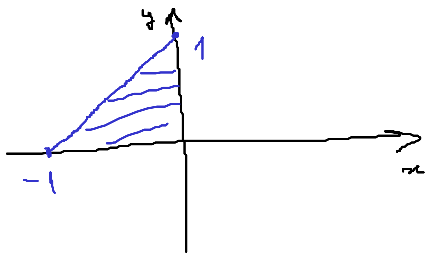
$(x,y)\in A$

1° $x,y\ge 0$

$x+y<1$

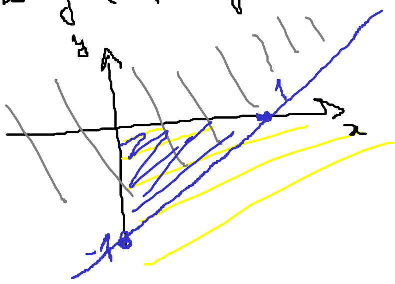


3° $x<0$, $y\ge 0$

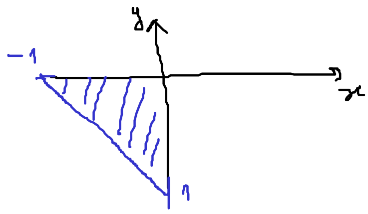


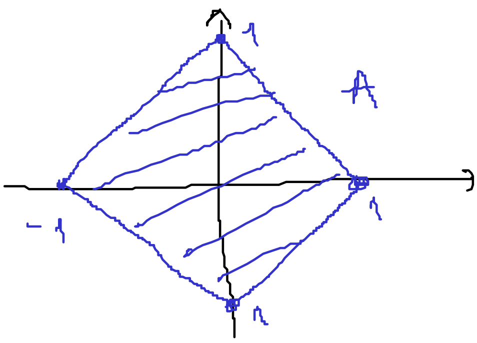
2° $x\ge 0$, $y<0$

$x-y<1 \to y>x-1$

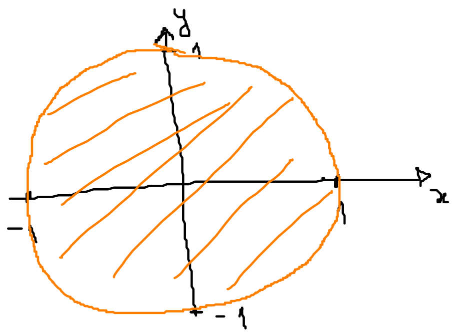


4° $x<0, y<0$





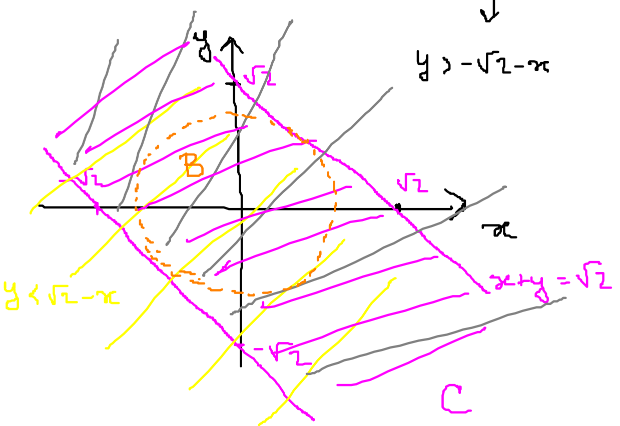
$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}<1\}$



$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < \sqrt{2}\}$

$|x+y| < \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} < x+y < \sqrt{2}$

$y > -\sqrt{2} - x \qquad y < \sqrt{2} - x$



Формално $A \subseteq B$:

Нека је $(x,y) \in A$ произвољно. Показујемо да $(x,y) \in B$, односно да је $\sqrt{x^2+y^2} < 1$.

Како је $(x,y) \in A$, онда $|x|+|y| < 1$.

Како $0 \leq \sqrt{x^2+y^2} < 1$ и $0 \leq |x|+|y| < 1$, квадрирањем или кореновањем остају исте неједнакости, у смислу

$0 \leq |x|+|y| < 1$ онда $0^2 \leq (|x|+|y|)^2 < 1^2$.

$$|x|^2+|y|^2+2|x||y| < 1$$

$$x^2+y^2+\underbrace{2|x||y|}_{\geq 0} < 1$$

$$x^2+y^2 \leq x^2+y^2+2|x||y| < 1$$

Дакле, $x^2+y^2 < 1$, одакле $\sqrt{x^2+y^2} < \sqrt{1} = 1$. Следи, $(x,y) \in B$.

Дакле, $A \subseteq B$.