Трећи домаћи

Курс: Анализа 4 за 4И, 2023/2024, професор: др Игор Уљаревић, асистент: Душан Дробњак

1. ($\star$) Скицирати поље праваца и интегралне криве диференцијалне једначине $x' = \frac{2t}{x}$, не решавајући је. На слици означити:

   (а) Решење које је глобално (дефинисано је за свако $t \in \mathbb{R}$).

   (б) Решење које није глобално (максимални интервал на коме је дефинисано то решење је прави подскуп од $\mathbb{R}$).

   (в) Решење које је део праве.

   За које захтеве (а)–(в) постоји јединствено решење, а за које више њих? Одговор образложити.

2. ($\star$) Нека је $a \in \mathbb{R}$. У зависности од параметра a скицирати поље праваца и интегралне криве диференцијалне једначине $x' = a + x^2$ (не решавајући једначину) у ситуацијама које су квалитативно другачије.
   Напомена: На пример, није потребно скицирати интегралне криве и за $a = 15$ и $a = 20$ јер ће те две слике бити квалитативно идентичне. Потребно је наћи све случајеве који су квалитативно другачији и у сваком од њих скицирати интегралне криве за по једну репрезентативну вредност за a.

3. Дат је Кошијев проблем $x' = x - t + 1$, $x(t_0) = x_0$.

   (а) Доказати да су за произвољне t_0 и x_0 задовољени услови Пикарове теореме.

   (б) Формирати итеративни низ функција из доказа Пикарове теореме и на тај начин одредити решење у случају $t_0 = 0$ и $x_0 = 1$.

4. Дат је почетни проблем $x' = \frac{\chi_{[0,2]}(x) \cdot \sqrt[3]{x-1}}{t-3}$, $x(0) = x_0$, $t \in [0,1]$, где је χ_A карактеристична функција скупа A. Проверити да ли су испуњени услови Пеанове и Пикарове теореме, ако је:

   (а) $x_0 = 1$; (б) $x_0 = 2$; (в) $x_0 = 3$.

5. ($\star$) Нека је $P(t)$ неконстантан полином. Да ли функција $x(t) = (t-1)^2 P(t)$ може бити решење диференцијалне једначине $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ дефинисано на некој отвореној околини тачке $t = 1$, ако су $a(t)$ и $b(t)$ непрекидне функције? Решити задатак уз помоћ Пикарове теореме.
   Помоћ: Зашто овде важи Пикарова теорема? Посматрати почетни проблем $x(1) = x'(1) = 0$.

6. Наћи све параметре $a \in \mathbb{R}$ за које је $\phi^t \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi^t(x) = x(e^{2t} + at)$ једнопараметарска фамилија пресликавања. Које је векторско поље које дефинише ϕ^t у тим случајевима?

7. ($\star$) Доказати да је са $\phi^t(x_1, \ldots, x_n) = e^t(x_1, \ldots, x_n)$ задат ток радијалног векторског поља $R_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R_1(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$. Наћи ток радијалног векторског поља $R_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R_a(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$, где је $a \in \mathbb{R}$ параметар. Скицирати у равни (за $n = 2$) векторска поља R_1 и R_2 и њихове токове.

8. Испитати како следећи системи мењају запремину у зависности од $\lambda \in \mathbb{R}$:

(а) $X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} X$;

(б) $X' = e^{A} X$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. ($\star$) Дато је векторско поље $F(x, y) = (x^2 - 2x + 2xy + 3y^3, 5y - 2x^2 - y^2 - 2xy)$. Нека је $\Pi = [0, 1] \times [0, 1]$ квадрат. Наћи површину слике $\phi^t(\Pi)$, где је ϕ^t ток после времена t дефинисан пољем F.