Други домаћи

Курс: Анализа 4 за 4И, 2023/2024, професор: др Игор Уљаревић, асистент: Душан Дробњак

1. Скицирати фазни портрет система $X' = AX$, ако је

   (а) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$; (б) $A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} a & -a \\ b-a & a \end{bmatrix}$, за $a, b \in \mathbb{R}$ и посматрајмо фазни портрет у околини положаја равнотеже $(0,0)$ система диференцијалних једначина $X' = AX$.

   (а) ($\star$) Доказати да посматрани фазни портрет не може бити ни центар ни звезда (било стабилна или нестабилна), ни за један избор уређеног пара $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   (б) Наћи један уређени пар $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ за који је посматрани фазни портрет нестабилна спирала и скицирати га.

3. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и нека је дат систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + (a+b)x_2 \\ x_2' &= ax_1 + bx_2. \end{aligned}$$

   (а) ($\star$) У зависности од реалних параметара a и b одредити тип фазног портрета датог динамичког система.

   (б) Скицирати фазни портрет датог динамичког система у ситуацијама када је $a = 0, b = -1$ и $a = 1, b = 2$.

   (в) За $a = b = 2$ наћи сва решења $X(t)$ датог система за која важи $\lim_{t\to\infty} X(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Решити систем диференцијалних једначина $X' = AX$, ако је $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Нека је $a \in \mathbb{R}$ параметар и дата је матрица $A = \begin{bmatrix} a-1 & a+1 & -a \\ a-2 & a+2 & -a \\ a-2 & a+1 & 1-a \end{bmatrix}$.

   Помоћ: Сопствене вредности ове матрице су $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = a$.

   (а) У зависности од параметра a, свођењем на Жорданову нормалну форму, решити систем диференцијалних једначина $X' = AX$.

   (б) ($\star$) Доказати да за $a \neq 0$ и за дато $c \in \mathbb{R}^3$ постоји јединствено решење проблема $X' = AX,\ X'(1) = c$ дато са $X(t) = e^{A(t-1)}A^{-1}c$.

6. Дат је линеаран систем $X' = AX$, где је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Доказати:

   (а) ($\star$) Ако је n непарно и A недегенерисана ($\det A \neq 0$), онда постоји бар једно решење датог система које није периодично.

Нека је надаље $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(а) Наћи неко непериодично решење система $X' = AX$.

(в) ($\star$) Доказати да је једина матрица $B \in M_3(\mathbb{R})$ за коју важи $e^{tB} = e^{tA}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ управо $B = A$.

7. Дата је диференцијална једначина $X' = AX$, где је

$$A = \begin{bmatrix} \star & 2 & \star \\ \star & -3 & \star \\ \star & \star & -3 \end{bmatrix}.$$

(а) Заменити $\star$ у матрици A (не обавезно истим) бројевима тако да једно решење једначине буде $X_p(t) = \begin{bmatrix} e^t - e^{-5t} \\ e^t + e^{-5t} \\ e^t \end{bmatrix}$.

(б) Наћи опште решење дате једначине, са матрицом добијеном у делу под (а).

(в) Наћи сва решења система за која важи $X'(0) = 2X(0)$.

8. ($\star$)

(а) Дата је матрица $P \in M_4(\mathbb{R})$ облика $P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, где су $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ које комутирају у односу на множење ($AB = BA$). Одредити e^{tP} сматрајући као познатим матричне функције e^{tA} и e^{tB} (тј, одредити e^{tP} тако да у изразу фигуришу e^{tA} и e^{tB}).

(б) Одређивањем матричне експоненцијалне функције e^{tC} решити систем диференцијалних једначина $X' = CX$, где је $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$.

9. Дат је Кошијев проблем за систем $X'(t) = AX(t) + B(t)$, $X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, где је

$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2\alpha - 1 & 4 \\ -2 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, и нека је $\alpha \neq \frac{3}{2}$ такво да важи $e^{\det(A)} \det(e^A) = e$.

(а) Одредити α.

(б) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(в) Решити дати Кошијев проблем ако је $B(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 - t \\ 2 \end{bmatrix}$.

10. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ решити систем диференцијалних једначина

$$Y' = \begin{bmatrix} 2a & 2a-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} e^{2ax-x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11. ($\star$) Формирати хомогену линеарну диференцијалну једначину са константним коефицијентима минималног реда чија су решења $x_1(t) = t$ и $x_2(t) = e^{-t}\sin t$. Шта је опште решење те формиране једначине?

12. Наћи опште решење диференцијалне једначине $(x'' - 2x' - 3x)' = -16e^{-t} + 16te^{-t}$. Наћи и сва решења за која важи $x(0) = 1$ и која имају хоризонталну асимптоту кад $t \to +\infty$.