Први домаћи

Курс: Анализа 4 за 4И, 2023/2024, професор: др Игор Уљаревић, асистент: Душан Дробњак

1. (Коси хитац) Честица која се креће у xy-равни почиње своје кретање из тачке $(x_0, y_0) \in [0, +\infty)^2$ са почетном брзином интензитета v, чији вектор заклапа са хоризонталом угао $\alpha \in (0, \pi/2)$. Честица се креће у гравитационом пољу чије гравитационо убрзање има интензитет g и усмерено је вертикално наниже.

   (а) Записати почетни проблем који описује кретање честице и одредити положај честице од времена (у зависности од x_0, y_0, v, α, g и времена t).

   (б) Колики је домет честице (хоризонтално растојање од почетног места до места док не падне на подлогу $y = 0$)? За коју вредност угла α је домет максималан?

2. Решити следеће Кошијеве проблеме.

   (а) $tx' = (\ln x - \ln t)x$, $x, t > 0$, $x(1) = 4$.

   (б) $x' = e^{9x-t}$, $x(0) = 0$.

   (в) $x' = \dfrac{x^2 - 2xt - t^2}{x^2 + 2xt - t^2}$, $x(1) = 1$.

3. За $\alpha > 0$ дата је диференцијална једначина

$$\frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{y(x)^2 + \alpha}} = \frac{8x^2 + y(x)^2 + 1}{2x^2 + y(x)^2 + 1}. \tag{$\sharp$}$$

   (а) Трансформисати једначину ($\sharp$) сменом $v(x) = \sqrt{y(x)^2 + \alpha}$.

   (б) Решити једначину ($\sharp$) за једно $\alpha > 0$ по избору.

4. Наћи општа решења следећих диференцијалних једначина.

   (а) $tx' = t^2x^3 - x$.

   (б) $x' \sin 2x = 10 \sin^2 x + \dfrac{2e^{-2t}}{\sin x}$.

5. Наћи општа решења следећих Рикатијевих диференцијалних једначина.

   (а) $x' + x^2 + \dfrac{4x}{t} + \dfrac{2}{t^2} = 0$.

   (б) $x' - \dfrac{x^2}{1-t^3} + \dfrac{t^2x}{1-t^3} + \dfrac{2t}{1-t^3} = 0$.

6. Решити диференцијалну једначину

$$(x' + 1) \ln\left(\frac{x+t}{t+3}\right) = \frac{x+t}{t+3},$$

   уводећи смене $x = y + 3$, $t = u - 3$ и посматрајући једначину по $y(u)$ уместо по $x(t)$.

7. Тангента криве $\gamma\colon y = y(x)$ у тачки M сече $x-$осу у тачки P. Одредити једначине свих кривих γ тако да средиште дужи MP припада правој $y = x$.

8. Дата је диференцијална једначина

$$(t+2x)x' - kx + \frac{2}{t}(x^m + tx) + t = 0.$$

Наћи све парове $(k, m) \in \mathbb{R}^2$ за које једначина постаје једначина тоталног диференцијала и решити је у тим случајевима.

9. ($\star$) Две шоље топлог чаја познатих почетних температура $T_1(0) = T_2(0) = T_0$ су остављене да се хладе на собној температури T_∞ (таквој да важи $T_\infty < T_0$). Прва шоља се остави недирнута и промена њене температуре $T_1(t)$ у времену се може моделовати Њутновим законом хлађења

$$\frac{\mathrm{d}T_1(t)}{\mathrm{d}t} = -a(T_1(t) - T_\infty),$$

где је $a > 0$ дата константа која зависи од структуре шоља и геометрије поставке. У другу шољу се од тренутка $t = 1/a$ почне сипати вода константном брзином која је све топлија и топлија (линеарно са временом) и промена њене температуре $T_2(t)$ у времену (за $t \neq 1/a$) се може моделовати као

$$\frac{\mathrm{d}T_2(t)}{\mathrm{d}t} = -a(T_2(t) - T_\infty) + tH(t - 1/a),$$

где је са H означена Хевисајдова функција $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

(а) Наћи температуре чаја у обе шоље, $T_1(t)$ и $T_2(t)$, за време $t \geqslant 0$, претпостављајући да је температура непрекидна функција од времена. Претпоставити да су константе T_0, T_∞, a познате.

(б) Описати шта се дешава са овим температурама после довољно много времена (када $t \to \infty$).

10. ($\star$) Дата је линеарна диференцијална једначина првог реда и познато је да су $x_1(t)$ и $x_2(t)$ два њена различита партикуларна решења. На основу њих записати шта је опште решење те једначине.

11. ($\star$) Решити диференцијалну једначину $t^2x^3 + x^2t + x + (t^3x^2 - t^2x - t)x' = 0$.