Час из ДПЈБ, Фуријеова трансформација - трећи део

8) Нека је $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1\\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$

а) Доказати да $f\in S'(\mathbb{R})$.

б) Наћи $\mathcal{F}[f]$.

в) Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt2}{2}x\right)dx$

а) $f\in L^1(\mathbb{R})\Rightarrow f\in S'(\mathbb{R})$

б) $\varphi\in S(\mathbb{R})$

$$\langle\mathcal{F}[f],\varphi\rangle=\langle f,\mathcal{F}[\varphi]\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{ix\xi}d\xi\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-x^2)\cdot\varphi(\xi)e^{ix\xi}d\xi\,dx\overset{(*)}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)e^{ix\xi}dx\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\int_{-1}^{1}(1-x^2)\cdot\cos(x\xi)\,dx\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{4}{\xi^3}(\sin\xi-\xi\cdot\cos\xi)\,d\xi$$

$$\Rightarrow\mathcal{F}[f](\xi)=\underbrace{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\xi-\xi\cos\xi}{\xi^3}}_{g(\xi)}$$

(*) Фубини:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|(1-x^2)\varphi(\xi)e^{ix\xi}\right|d\xi\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(\xi)|\,d\xi<+\infty$$

в) $f(\xi)=\mathcal{F}^{-1}[g]$

$$\langle f,\varphi\rangle=\langle\mathcal{F}^{-1}[g],\varphi\rangle=\langle g,\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-ix\xi}d\xi\,dx=$$

$\varphi\in S(\mathbb{R})$

објаснити:

$$\overset{(*)}{=}\int^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2\sqrt2}{\sqrt\pi}\cdot\int^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}e^{-ix\xi}dx\,d\xi=$$

домаћи: оправдати Фубинија

$$\circledast = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}}_{\text{парна}}\underbrace{e^{-ix\xi}}_{\cos(x\xi)+i\sin(x\xi)}\,dx\,d\xi =$$

$\cos(x\xi)$ ↳ парна, $\sin(x\xi)$ ↳ непарна

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\cos(x\xi)\,dx\,d\xi =$$

$$=\left\langle \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\cos(x\xi)\,dx\,,\ \varphi(\xi)\right\rangle$$

$$\Rightarrow f(x) = (1-x^2)\cdot\chi_{[-1,1]}(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\cos(x\xi)\,dx$$

$$\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}:\quad \int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)dx = -\frac{\pi}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{8}.$$

(9) Нека је Θ Хевисајдова дистрибуција и $a>0$.

а) Доказати $\mathcal{F}[\Theta(x)\cdot e^{-ax}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a-i\xi}$ (у $S'(\mathbb{R})$).

б) Доказати $\Theta(x)e^{-ax} \xrightarrow[a\to 0+]{S'(\mathbb{R})} \Theta(x)$.

в) Наћи $\mathcal{F}[\Theta]$.

г) Покушати в) из чињенице $\Theta'=\delta$.

а) $\varphi\in S(\mathbb{R})$, $f_a(x)=\Theta(x)\cdot e^{-ax}$

домаћи: $f_a\in S'(\mathbb{R})$ домаћи: оправдати Фубинија

$$\langle\mathcal{F}[f_a],\varphi\rangle = \langle f_a,\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\int_0^{+\infty}e^{-ax}e^{ix\xi}\,dx\,d\xi =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\left.\frac{e^{x(i\xi-a)}}{i\xi-a}\right|_{x=0}^{x=+\infty}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{0-1}{i\xi-a}\,d\xi = \left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a-i\xi},\ \varphi(\xi)\right\rangle$$

б) $\varphi\in S(\mathbb{R})$

б) $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\lim_{a\to 0+} \langle f_a, \varphi \rangle = \lim_{a\to 0+} \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cdot\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{a\to 0+} e^{-ax}\cdot\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \langle \theta, \varphi \rangle$$

$$\left|e^{-ax}\cdot\varphi(x)\right| \leq 1\cdot\frac{C}{1+x^2} \Rightarrow \text{може ТДК}$$

г) $$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \mathcal{F}[\delta] = \mathcal{F}[\theta'] = -i\xi\cdot\mathcal{F}[\theta]$$

$\mathcal{F}[\theta]$ је дистрибуција која помножена са $\xi \mapsto i\xi$ даје $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. ???

можда има и више таквих ...

в) $\mathcal{F}$ непрекидна на $S'(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}[\theta] = S'(\mathbb{R})\text{-}\lim\limits_{a\to 0+} \mathcal{F}\left[e^{-ax}\cdot\theta(x)\right] =$

$$= S'(\mathbb{R})\text{-}\lim_{a\to 0+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a-i\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\delta + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\cdot P\frac{1}{\xi}$$

формула Сохоцког: погледати списак