Час из ДПЈБ, Фуријеова трансформација - други део

Деф. Фуријеова трансформација дистрибуције $f\in S'(\mathbb{R})$ је

$$\langle \mathcal{F}[f],\varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle \ , \ \forall\varphi\in S(\mathbb{R})$$

② Наћи $\mathcal{F}[\delta_{x_0}]$.

$$\varphi\in S(\mathbb{R}). \quad \langle \mathcal{F}[\delta_{x_0}],\varphi\rangle = \langle\delta_{x_0},\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{ix_0x}\,dx =$$

$$= \langle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ixx_0}}_{\text{да ли } \in S'(\mathbb{R})?}, \varphi(x)\rangle \Rightarrow \mathcal{F}[\delta_{x_0}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ixx_0}$$

спец: $\mathcal{F}[\delta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ixx_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot(1+x^2)}\cdot(1+x^2)^{2/2} \ , \ g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)}\in L^1(\mathbb{R}),\ d=2 \ ✓$$

Напомена, $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R})\to S'(\mathbb{R})$ је бијекција, линеарно и непрекидно. (*)

Деф. Лимес у $S'(\mathbb{R})$ дефинишемо аналогно као у $D'(\mathbb{R})$:

$$f_j \xrightarrow[j\to\infty]{S'(\mathbb{R})} f \text{ акко } \forall\varphi\in S(\mathbb{R}) \text{ важи } \langle f_j,\varphi\rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} \langle f,\varphi\rangle.$$

③ Нека је $R>0$ и $f_R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисана са $f_R = \begin{cases}1, & |x|\le R\\ 0, & |x|>R\end{cases}$.

а) Доказати $f_R\in S'(\mathbb{R})$.

б) Одредити $\mathcal{F}[f_R]$.

а) $f_R\in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f_R\in S'(\mathbb{R})$

б) $\varphi\in S(\mathbb{R})$

$$\langle\mathcal{F}[f_R],\varphi\rangle = \langle f_R,\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \int_{-R}^{R} 1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot e^{ix\xi}\,dx\right)d\xi$$

$$\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)\cdot e^{ix\xi}|\,dx\,d\xi = \int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx\,d\xi = 2R\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{|\varphi(x)|}_{\le \frac{C_{2,0}}{x^2+1}}dx \le$$

$$\le 2R\cdot C_{2,0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} < +\infty$$

Фубини

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-R}^{R}\varphi(x)\,e^{ix\xi}\,d\xi\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\left(\frac{e^{ix\xi}}{ix}\right)\Bigg|_{\xi=-R}^{\xi=R}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\frac{e^{ixR}-e^{-ixR}}{ix}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\frac{2\sin(Rx)}{x}\,dx = \left\langle \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin(Rx)}{x}, \varphi\right\rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f_R] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(Rx)}{x}$$

(4) Нека су $f\in S'(\mathbb{R})$ и $\varphi\in S(\mathbb{R})$. Дефинишемо $\tilde{\varphi}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ са $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(-x)$ и $\tilde{f}:S(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ као $\langle\tilde{f},\varphi\rangle=\langle f,\varphi\rangle$.

а) Доказати да $\tilde{\varphi}\in S(\mathbb{R})$ и $\tilde{f}\in S'(\mathbb{R})$.

б) $\widetilde{\mathcal{F}[\varphi]} = \mathcal{F}^{-1}[\varphi]$

в) $\mathcal{F}^{-1}[f] = \mathcal{F}[\tilde{f}]$

а) за вежбу

б) $\widetilde{\mathcal{F}[\varphi]}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-ix\xi}\,dx = \mathcal{F}^{-1}[\varphi]$.

в) $\langle\mathcal{F}[\tilde{f}],\varphi\rangle = \langle\tilde{f},\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle f,\widetilde{\mathcal{F}[\varphi]}\rangle = \langle f,\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle = \langle\mathcal{F}^{-1}[f],\varphi\rangle$

$\varphi\in S(\mathbb{R})$

(5) Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ тд. $f\in S'(\mathbb{R})$. Доказати ако је f парна, онда $\mathcal{F}^{-1}[f]=\mathcal{F}[f]$.

(5) Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ нпр. $f\in S'(\mathbb{R})$ парна ...

$$\langle \tilde{f}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle f, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow f = \tilde{f} \Rightarrow \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[\tilde{f}] \underset{4B}{=} \mathcal{F}^{-1}[f].$$

(6) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

а) Доказати $f \in S'(\mathbb{R})$.

б) Наћи $\mathcal{F}[f]$.

а) упутство: $$g(x) = \begin{cases} \max\limits_{[-1,1]} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \in [-1,1] \\ \dfrac{1}{x^2}, & x \notin [-1,1] \end{cases}$$

б) Нашли смо $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{x} \;/\; \mathcal{F}^{-1}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{\sin x}{x}\right] \underset{5}{=} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \chi_{[-1,1]}$$

Својства ФТ:

1) $(\mathcal{F}[f])^{(k)} = \mathcal{F}[(ix)^k f]$

2) $\mathcal{F}[f^{(k)}] = (-ix)^k \mathcal{F}[f]$

множење дистрибуције функцијом

(7) Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ деф. са $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

а) Доказати $f \in S'(\mathbb{R})$.

б) Одредити $\mathcal{F}[f]$.

а) Хоћемо $|x^k| \le g(x)\cdot(1+x^2)^{d/2}$, $g\in L^1$

а) Хочемо $|x^k| \le g(x)\cdot(1+x^2)^{d/2}$, $g\in L^1$.

$x>1:$ $|x^k| = \dfrac{|x|^{k+2}}{x^2} \le \dfrac{(1+x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}\cdot(1+x^2)^{\frac{k+2}{2}}$

$x\le 1:$ $|x^k| \le 1 \le 1\cdot(1+x^2)^{\frac{k+2}{2}}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & |x|>1 \\ 1, & |x|\le 1 \end{cases}$$

$g\in L^1$

б) $\mathcal{F}[x^k] = \mathcal{F}\left[(ix)^k\cdot i^k(-1)^k\right] = \left(\mathcal{F}\left[(-i)^k\right]\right)^{(k)} =$

$= (-i)^k\left(\mathcal{F}[1]\right)^{(k)} = (-i)^k\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\delta^{(k)}$

Знаємо $\mathcal{F}[\delta] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \delta = \mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] \underset{5}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathcal{F}[1]$