Час из ДПЈБ, Фуријеова трансформација - први део

Дистрибуције спорог раста

Деф. За функцију $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ из $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ кажемо да је брзо опадајућа ако $\forall m,k \in \mathbb{N}_0$ важи $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^m \varphi^{(k)}(x) = 0$. Скуп ових функција обележавамо са $C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$.

Важи $C^\infty_c(\mathbb{R}) \subseteq C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$.

① Доказати да $\psi \in C^\infty_\searrow(\mathbb{R}) \setminus C^\infty_c(\mathbb{R})$, где је $\psi(x) = e^{-x^2}$.

$\psi \notin C^\infty_c(\mathbb{R})$ јасно, јер $\operatorname{supp}\psi = \mathbb{R}$.

индукција

$$\psi'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}, \quad \psi''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2 + 4x^2), \ \dots, \ \psi^{(k)}(x) = \underbrace{P_k(x)}_{\text{полином степена } k} \cdot e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^m \psi^{(k)}(x) = \lim_{x \to \pm\infty} Q_{m+k}(x) \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \psi \in C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$$

$C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$ је векторски простор. Дајемо му топологију конвергенцијом.

Деф. Нека је $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ низ у $C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$. Кажемо да φ_j конвергира ка φ ако $\forall m,k \in \mathbb{N}_0$ важи

$$x^m \varphi_j^{(k)}(x) \overset{\mathbb{R}}{\underset{j \to \infty}{\rightrightarrows}} x^m \varphi^{(k)}(x).$$

Простор $C^\infty_\searrow(\mathbb{R})$ са овом тополошком структуром обележавамо са $S(\mathbb{R})$ и конвергенцију записујемо са $\varphi_j \xrightarrow[j \to \infty]{S(\mathbb{R})} \varphi$.

Домаћи: Важи $D(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$. Ако $\varphi_j, \varphi \in D(\mathbb{R})$ и $\varphi_j \xrightarrow[j \to \infty]{D(\mathbb{R})} \varphi$, онда $\varphi_j, \varphi \in S(\mathbb{R})$ и $\varphi_j \xrightarrow[j \to \infty]{S(\mathbb{R})} \varphi$.

② $\varphi_j, \varphi \in D(\mathbb{R})$ и $\varphi_j \xrightarrow[j \to \infty]{S(\mathbb{R})} \varphi$, онда не мора да важи $\varphi_j \xrightarrow[j \to \infty]{D(\mathbb{R})} \varphi$.

(2) $\varphi_j, \varphi \in D(\mathbb{R})$ и $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi$, онда не мора да важи $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi$.

Посматрајмо $\varphi_j(x) = \frac{1}{j!}\varphi\left(\frac{x}{j}\right)$, где је φ произвољно из $D(\mathbb{R})$.

У $S(\mathbb{R})$ ће важити $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0$, али лимес $\lim\limits_{j\to\infty}\varphi_j$ у $D(\mathbb{R})$ $\nexists$.

Деф. Линеарни непрекидни функционали на $S(\mathbb{R})$ називају се дистрибуције спорог раста. Скуп таквих се означава са $S'(\mathbb{R})$.

$f : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$

линеарност: $f(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 f(\varphi_1) + \alpha_2 f(\varphi_2)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R})$.

непрекидност: $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0 \implies f(\varphi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Доказати: Важи $S'(\mathbb{R}) \subseteq D'(\mathbb{R})$. $f(x) = e^{x^2} \in D'(\mathbb{R}) \setminus S'(\mathbb{R})$, за другу инклузију.

(3) Испитати да ли $\delta \in S'(\mathbb{R})$.

добра дефинисаност и линеарност ✓

непрекидност: $\varphi_j \in S(\mathbb{R})$, $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0 \implies x^m \varphi_j^{(k)}(x) \overset{\mathbb{R}}{\underset{j\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$, $\forall m,k \in \mathbb{N}_0$

треба нам да $\langle \delta, \varphi_j \rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} \delta(0)$, тј. $\varphi_j(0) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

$m = k = 0 \implies \varphi_j(x) \overset{\mathbb{R}}{\underset{j\to\infty}{\rightrightarrows}} 0 \underset{\text{ТПТ}}{\implies} \varphi_j(0) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Лема: Ако $\varphi \in S(\mathbb{R})$ онда важи:

1) $\forall m,k \in \mathbb{N}_0\ \exists C_{m,k} \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ |x^m \varphi^{(k)}(x)| \le C_{m,k}$.

2) $\forall d \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}_0\ \exists C_{d,k}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ |\varphi^{(k)}(x)| \le \dfrac{C_{d,k}}{(1+x^2)^{d/2}}$

(4) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Лебег мерљива и $g \in L^1(\mathbb{R})$, $g \ge 0$, $d \in \mathbb{N}_0$ и $|f(x)| \le g(x)(1+x^2)^{d/2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Доказати да је T_f дистрибуција из $S'(\mathbb{R})$.

специјално: за $d = 0$: $f \in L^1(\mathbb{R}) \implies T_f \in S'(\mathbb{R})$.

специјално: за $d=0$: $f\in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f\in S'(\mathbb{R})$.

1. добра деф: $\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} g(x)\,(1+x^2)^{d/2}\cdot|\varphi(x)|\,dx \leq C_{d,0}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx <+\infty.$

$\varphi\in S(\mathbb{R})$

лема 2) $\Rightarrow \exists C_{d,0},\ \forall x\in\mathbb{R}\quad |\varphi(x)| \leq \dfrac{C_{d,0}}{(1+x^2)^{d/2}}$

2. линеарност: ✓

3. непрекидност: $\varphi_j\in S(\mathbb{R}),\ \varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0 \overset{?}{\Rightarrow} T_f(\varphi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

$$|T_f(\varphi_j)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi_j(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} g(x)\,(1+x^2)^{d/2}|\varphi_j(x)|\,dx$$

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,(1+x^2)^{d/2}|\varphi_j(x)|\,dx \leq \varepsilon\cdot 2^{d/2}\cdot\|g\|_{L^1} <+\infty$

$$|\varphi_j(x)| \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow |\varphi_j(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x,\ \forall j\geq j_0$$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} g(x)\,(1+x^2)^{d/2}|\varphi_j(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} g(x)\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{d/2}|x^d\varphi_j(x)| \leq \varepsilon\cdot 2^{d/2}\cdot\|g\|_{L^1} <+\infty$

$$|x^d\varphi_j(x)| \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow |x^d\varphi_j(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x,\ \forall j\geq j_1$$

$$\varepsilon\to 0 \Rightarrow T_f(\varphi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

⑤ Да ли $\theta\in S'(\mathbb{R})$?

Да. $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $d=2$

$$\left.\begin{array}{l} |\theta(x)| \leq 1 = \dfrac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)^{2/2} = g(x)\cdot(1+x^2)^{d/2} \\ \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \pi \Rightarrow g\in L^1(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow \theta\in S'(\mathbb{R}).$$

⑥ Доказати да $P_{\frac{1}{x}}\in S'(\mathbb{R})$.

$$\langle P_{\frac{1}{x}},\varphi\rangle = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

1. добра деф.

2. линеарност ✓ очигледно

1. добра деф.

2. линеарност
3. непрекидност } доказати

1. $\varphi \in S(\mathbb{R}) \qquad \langle P\frac{1}{x}, \varphi \rangle = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \overset{⊛}{\int_{\varepsilon}^{+\infty}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right) =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0)$$

Да ли ⊛ $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ конвергира? – морају оба да конвергирају да бисмо их сабрали

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|x\varphi(x)|}{x^2}\,dx \le \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{C_{1,0}}{x^2}\,dx < +\infty$$

→ лема 1)

Фуријеова трансформација

$$\varphi \in S(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot e^{ix\xi}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

(1) Одредити Фуријеову трансформацију функције $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\cos(x\xi) + \overbrace{i\sin(x\xi)}^{\text{непарна}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \cos(x\xi)\,dx}_{g(x,\xi)} = I(\xi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot (-\sin(x\xi))$$

1) g и $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ непрекидне

1) g и $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ непрекидне

2) $I(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 < +\infty$

$x^2 = t$
$2x\,dx = dt$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial \xi}\right| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \right| dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\, dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} \frac{dt}{2} < +\infty$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial \xi}\right| dx$ равномерно конв. (Вајерштрас)

$$1,2,3 \Rightarrow I'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial \xi} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot \sin(x\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sin(x\xi) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{0} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \xi \cdot \cos(x\xi)\, dx \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(x\xi)\, dx = -\xi \cdot I(\xi)$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow I'(\xi) + \xi \cdot I(\xi) = 0 \\ I(0) = 1 \end{aligned}\right\} I(\xi) = e^{-\xi^2/2}, \text{ тј. } \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \varphi(\xi).$$

Својства ФТ:

1) $\left(\mathcal{F}[\varphi]\right)^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}\left[(ix)^k \varphi(x)\right](\xi)$

2) $\mathcal{F}\left[\varphi^{(k)}\right](\xi) = (-i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi](\xi)$

Следи $\mathcal{F}[\varphi] \in S(\mathbb{R})$ ако $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Дакле, $\mathcal{F}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ и то:

- $\mathcal{F}$ је бијекција
- $\exists \mathcal{F}^{-1}: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ тј. $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[\varphi]\right] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right] = \varphi$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ су линеарне и непрекидне
- $\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \cdot e^{-ix\xi} d\xi$, $\psi \in S(\mathbb{R})$.