Час из ДПЈБ, Фуријеова трансформација

Дистрибуције спорог раста

Деф. За функцију $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ из $\varphi\in C^\infty(\mathbb{R})$ кажемо да је брзо опадајућа ако $\forall m,k\in\mathbb{N}_0$ важи $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^m\varphi^{(k)}(x)=0$. Скуп свих функција обележавамо са $C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})$.

Важи $C_c^\infty(\mathbb{R})\subseteq C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})$.

① Доказати да $\psi\in C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})\setminus C_c^\infty(\mathbb{R})$, где је $\psi(x)=e^{-x^2}$.

$\psi\notin C_c^\infty(\mathbb{R})$ јасно, јер $\operatorname{supp}\psi=\mathbb{R}$.

индукција

$$\psi'(x)=-2x\cdot e^{-x^2},\quad \psi''(x)=e^{-x^2}\cdot(-2+4x^2),\ \dots,\ \psi^{(k)}(x)=\underbrace{P_k(x)}_{\text{полином степена } k}\cdot e^{-x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^m\psi^{(k)}(x)=\lim_{x\to\pm\infty}Q_{m+k}(x)\cdot e^{-x^2}=0\ \Rightarrow\ \psi\in C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})$$

$C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})$ је векторски простор. Дајемо му топологију конвергенцијом.

Деф. Нека је $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ низ у $C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})$ и $\varphi\in C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})$. Кажемо да φ_j конвергира ка φ ако $\forall m,k\in\mathbb{N}_0$ важи

$$x^m\varphi_j^{(k)}(x)\ \underset{j\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}}\ x^m\varphi^{(k)}(x).$$

Простор $C^\infty_{\searrow}(\mathbb{R})$ са овом тополошком структуром обележавамо са $S(\mathbb{R})$. и конвергенцију записујемо са $\varphi_j\xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})}\varphi$.

Домаћи: Важи $D(\mathbb{R})\subset S(\mathbb{R})$. Ако $\varphi_j,\varphi\in D(\mathbb{R})$ и $\varphi_j\xrightarrow[j\to\infty]{D(\mathbb{R})}\varphi$, онда $\varphi_j,\varphi\in S(\mathbb{R})$ и $\varphi_j\xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})}\varphi$.

② $\varphi_j,\varphi\in D(\mathbb{R})$ и $\varphi_j\xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})}\varphi$, онда не мора да важи $\varphi_j\xrightarrow[j\to\infty]{D(\mathbb{R})}\varphi$.

(2) $\varphi_j, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi$, онда не мора да важи $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi$.

Посматрајмо $\varphi_j(x) = \frac{1}{j!}\varphi\left(\frac{x}{j}\right)$, где је φ произвољно из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

У $S(\mathbb{R})$ ће важити $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0$, али лимес $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_j$ у $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\nexists$.

Деф. Линеарни непрекидни функционали на $S(\mathbb{R})$ називају се дистрибуције спорог раста. Скуп таквих се означава са $S'(\mathbb{R})$.

$f : S(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$

линеарност: $f(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 f(\varphi_1) + \alpha_2 f(\varphi_2)$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R})$.

непрекидност: $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0 \implies f(\varphi_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Домаћи: Важи $S'(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. $f(x) = e^{x^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \setminus S'(\mathbb{R})$, за другу инклузију.

(3) Испитати да ли $\delta \in S'(\mathbb{R})$.

добра дефинисаност и линеарност ✓

непрекидност: $\varphi_j \in S(\mathbb{R})$, $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0 \implies x^m \varphi_j^{(k)}(x) \overset{\mathbb{R}}{\underset{j\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$, $\forall m, k \in \mathbb{N}_0$

треба нам да $\langle \delta, \varphi_j \rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} \delta(0)$, тј. $\varphi_j(0) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

$$m = k = 0 \implies \varphi_j(x) \overset{\mathbb{R}}{\underset{j\to\infty}{\rightrightarrows}} 0 \underset{\text{ТМТ}}{\implies} \varphi_j(0) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Лема: Ако $\varphi \in S(\mathbb{R})$ онда важи:

1) $\forall m, k \in \mathbb{N}_0\ \exists C_{m,k} \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ |x^m \varphi^{(k)}(x)| \le C_{m,k}$.

2) $\forall d \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}_0\ \exists C_{d,k}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ |\varphi^{(k)}(x)| \le \dfrac{C_{d,k}}{(1+x^2)^{d/2}}$

(4) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Лебег мерљива и $g \in L^1(\mathbb{R})$, $g \ge 0$, $d \in \mathbb{N}_0$ и $|f(x)| \le g(x)(1+x^2)^{d/2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Доказати да је T_f дистрибуција из $S'(\mathbb{R})$.

специјално: за $d = 0$: $f \in L^1(\mathbb{R}) \implies T_f \in S'(\mathbb{R})$.

специјално: за $d=0$: $f\in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in S'(\mathbb{R})$.

1. добра деф: $\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}} g(x)(1+x^2)^{d/2}\cdot|\varphi(x)|\,dx \le C_{d,0}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx < +\infty.$

$\varphi\in S(\mathbb{R})$

лема 2) $\Rightarrow \exists C_{d,0},\ \forall x\in\mathbb{R}\quad |\varphi(x)| \le \dfrac{C_{d,0}}{(1+x^2)^{d/2}}$

2. линеарност: ✓

3. непрекидност: $\varphi_j\in S(\mathbb{R}),\ \varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{S(\mathbb{R})} 0 \overset{?}{\Rightarrow} T_f(\varphi_j)\xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

$$|T_f(\varphi_j)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi_j(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}} g(x)(1+x^2)^{d/2}|\varphi_j(x)|\,dx$$

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)(1+x^2)^{d/2}|\varphi_j(x)|\,dx \le \varepsilon\cdot 2^{d/2}\cdot\|g\|_{L^1} < +\infty$

$$|\varphi_j(x)| \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow |\varphi_j(x)| \le \varepsilon,\ \forall x,\ \forall j\ge j_0$$

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} g(x)(1+x^2)^{d/2}|\varphi_j(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} g(x)\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{d/2}|x^d\varphi_j(x)| \le \varepsilon\cdot 2^{d/2}\cdot\|g\|_{L^1} < +\infty$

$$|x^d\varphi_j(x)| \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow |x^d\varphi_j(x)| \le \varepsilon,\ \forall x,\ \forall j\ge j_1$$

$$\varepsilon\to 0 \Rightarrow T_f(\varphi_j)\xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

5 Да ли $\theta\in S'(\mathbb{R})$?

Да. $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $d=2$

$$\left.\begin{aligned}&|\theta(x)| \le 1 = \frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)^{2/2} = g(x)\cdot(1+x^2)^{d/2}\\ &\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \pi \Rightarrow g\in L^1(\mathbb{R})\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta\in S'(\mathbb{R}).$$

6 Доказати да $P\frac{1}{x}\in S'(\mathbb{R})$.

$$\langle P\tfrac{1}{x},\varphi\rangle = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

1. добра деф.
2. линеарност

1. добра деф.

2. линеарност $\Big\}$ доказати

3. непрекидност

1. $\varphi \in S(\mathbb{R})$ $\quad \langle P\frac{1}{x}, \varphi \rangle = v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \left(\overset{\circledast}{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right) =$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = 2\varphi'(0)$$

Да ли $\circledast \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ конвертира? – морају оба да конвергирају да бисмо их сабрали

лема 1)

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{|x\varphi(x)|}{x^2}\,dx \le \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{C_{1,0}}{x^2}\,dx < +\infty$$

Фуријеова трансформација

$$\varphi \in S(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot e^{ix\xi}\,dx \quad , \xi \in \mathbb{R}$$

① Одредити Фуријеову трансформацију функције $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{ix\xi}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\cos(x\xi) + \overbrace{i\sin(x\xi)}^{\text{непарна}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \cos(x\xi)\,dx}_{g(x,\xi)} = I(\xi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot (-\sin(x\xi))$$

1) g и $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ непрекидне

1) g и $\frac{\partial}{\partial \xi}$ непрекидне

2) $$I(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 < +\infty$$

$x^2 = t$

$2x\,dx = dt$

3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \right| dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x\, dx = 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} \frac{dt}{2} < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial g}{\partial \xi} \right| dx$$ равномерно конв. (Вајерштрас)

$$1,2,3 \Rightarrow I'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial \xi} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot \sin(x\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Bigg(\underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sin(x\xi) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{0} -$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \xi \cdot \cos(x\xi)\, dx \Bigg) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(x\xi)\, dx = -\xi \cdot I(\xi)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} I'(\xi) + \xi \cdot I(\xi) = 0 \\ I(0) = 1 \end{array} \right\} \; I(\xi) = e^{-\xi^2/2}$$, тј. $\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \varphi(\xi)$.

Својства ФТ:

1) $\left(\mathcal{F}[\varphi]\right)^{(k)}(\xi) = \mathcal{F}\left[(ix)^k \varphi(x)\right](\xi)$

2) $\mathcal{F}\left[\varphi^{(k)}\right](\xi) = (-i\xi)^k \mathcal{F}[\varphi](\xi)$

Следи $\mathcal{F}[\varphi] \in S(\mathbb{R})$ ако $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Дакле, $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ и то:

- $\mathcal{F}$ је бијекција
- $\exists \mathcal{F}^{-1} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ тд. $\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[\varphi]\right] = \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\right] = \varphi$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$
- $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ су линеарне и непрекидне
- $\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \cdot e^{-ix\xi} d\xi$, $\psi \in S(\mathbb{R})$.

Деф. Фуријеова трансформација дистрибуције $f \in S'(\mathbb{R})$ је

$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle$, $\forall \varphi \in S(\mathbb{R})$

Деф. Фуријеова трансформација дистрибуције $f \in S'(\mathbb{R})$ је

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R})$$

② Наћи $\mathcal{F}[\delta_{x_0}]$.

$\varphi \in S(\mathbb{R})$. $\langle \mathcal{F}[\delta_{x_0}], \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ix_0 x} dx =$

$$= \langle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixx_0}}_{\text{да ли } \in S'(\mathbb{R})?}, \varphi(x) \rangle \Rightarrow \mathcal{F}[\delta_{x_0}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixx_0}$$

спец: $\mathcal{F}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixx_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot(1+x^2)} \cdot (1+x^2)^{2/2}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)} \in L^1(\mathbb{R}), d=2 \checkmark$$

Напомена, $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}) \to S'(\mathbb{R})$ је бијекција, линеарно и непрекидно. (*)

Деф. Лимес у $S'(\mathbb{R})$ дефинишемо аналогно као у $D'(\mathbb{R})$:

$$f_j \xrightarrow[j\to\infty]{S'(\mathbb{R})} f \text{ акко } \forall \varphi \in S(\mathbb{R}) \text{ важи } \langle f_j, \varphi \rangle \xrightarrow[j\to\infty]{} \langle f, \varphi \rangle.$$

③ Нека је $R>0$ и $f_R: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f_R = \begin{cases} 1, & |x| \le R \\ 0, & |x| > R \end{cases}$.

а) Доказати $f_R \in S'(\mathbb{R})$.

б) Одредити $\mathcal{F}[f_R]$.

а) $f_R \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f_R \in S'(\mathbb{R})$

б) $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\langle \mathcal{F}[f_R], \varphi \rangle = \langle f_R, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int\limits_{-R}^{R} 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot e^{ix\xi} dx \right) d\xi$$

$$\int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x) \cdot e^{ix\xi}| \, dx \, d\xi = | \qquad \xrightarrow{\text{Фубини}} \quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \varphi(x) e^{ix\xi} d\xi \, dx$$

$$\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)\cdot e^{ix\xi}|\,dx\,d\xi = \int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx\,d\xi = 2R\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|\varphi(x)|}_{\le \frac{C_{2,0}}{x^2+1}}dx \le$$

$$\le 2R\cdot C_{2,0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} < +\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}\int_{-R} \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\left(\frac{e^{ix\xi}}{ix}\right)\Bigg|_{\xi=-R}^{\xi=R} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\frac{e^{ixR}-e^{-ixR}}{ix}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\frac{2\sin(Rx)}{x}\,dx = \left\langle \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin(Rx)}{x}, \varphi\right\rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f_R] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(Rx)}{x}$$

(4) Нека су $f\in S'(\mathbb{R})$ и $\varphi\in S(\mathbb{R})$. Дефинишемо $\tilde\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ са $\tilde\varphi(x)=\varphi(-x)$ и $\tilde f: S(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ као $\langle\tilde f,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$.

а) Доказати да $\tilde\varphi\in S(\mathbb{R})$ и $\tilde f\in S'(\mathbb{R})$.

б) $\widetilde{\mathcal{F}[\varphi]} = \mathcal{F}^{-1}[\varphi]$

в) $\mathcal{F}^{-1}[f] = \mathcal{F}[\tilde f]$

а) за вежбу

б) $$\widetilde{\mathcal{F}[\varphi]}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](-\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-ix\xi}\,dx = \mathcal{F}^{-1}[\varphi].$$

в) $$\langle\mathcal{F}[\tilde f],\varphi\rangle = \langle\tilde f,\mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle f,\widetilde{\mathcal{F}[\varphi]}\rangle = \langle f,\mathcal{F}^{-1}[\varphi]\rangle = \langle\mathcal{F}^{-1}[f],\varphi\rangle$$

$\varphi\in S(\mathbb{R})$

(5) Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ т.д. $f\in S'(\mathbb{R})$. Доказати ако је f парна, онда $\mathcal{F}^{-1}[f]=\mathcal{F}[f]$.

$$\langle\tilde f,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle f,\varphi\rangle$$

$$\Rightarrow f=\check{f} \Rightarrow \mathcal{F}[f]=\mathcal{F}[\check{f}] \underset{4в}{=} \mathcal{F}^{-1}[f].$$

⑥ $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}.$$

а) Доказати $f\in S'(\mathbb{R})$.

б) Наћи $\mathcal{F}[f]$.

а) упутство: $$g(x)=\begin{cases} \max\limits_{[-1,1]}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\in[-1,1] \\ \dfrac{1}{x^2}, & x\notin[-1,1] \end{cases}$$

б) Нашли смо $$\mathcal{F}\left[\chi_{[-1,1]}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin x}{x} \quad / \mathcal{F}^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{\sin x}{x}\right] \underset{5}{=} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\chi_{[-1,1]}$$

Својства ФТ:

1) $\left(\mathcal{F}[f]\right)^{(k)}=\mathcal{F}\left[(ix)^k f\right]$

2) $\mathcal{F}\left[f^{(k)}\right]=(-ix)^k\,\mathcal{F}[f]$

множење дистрибуције функцијом

⑦ Нека је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ деф. са $f(x)=x^k$, $k\in\mathbb{N}_0$.

а) Доказати $f\in S'(\mathbb{R})$.

б) Одредити $\mathcal{F}[f]$.

а) Хоћемо $|x^k|\le g(x)\cdot(1+x^2)^{d/2}$, $g\in L^1$.

$x>1$: $|x^k|=\dfrac{|x|^{k+2}}{x^2}\le\dfrac{(1+x^2)^{\frac{k+2}{2}}}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\cdot(1+x^2)^{\frac{k+2}{2}}$

$x\le 1$: $|x^k|\le 1\le 1\cdot(1+x^2)^{\frac{k+2}{2}}$

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & |x|>1 \\ 1, & |x|\le 1 \end{cases}$$

$g\in L^1$

$x \le 1: \quad |x^k| \le 1 \le 1\cdot(1+x^2)$ $\qquad \{\ 1,\ |x| \le 1$

$g \in L^1?$

б) $\mathcal{F}[x^k] = \mathcal{F}\left[(ix)^k \cdot i^k (-1)^k\right] = \left(\mathcal{F}\left[(-i)^k\right]\right)^{(k)} =$

$$= (-i)^k \left(\mathcal{F}[1]\right)^{(k)} \underset{\uparrow}{=} (-i)^k \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \delta^{(k)}$$

Знамо $\mathcal{F}[\delta] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \delta = \mathcal{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] \underset{\substack{\uparrow\\5}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathcal{F}[1]$

⑧ Нека је $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & |x|<1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$

а) Доказати да $f \in S'(\mathbb{R})$.

б) Наћи $\mathcal{F}[f]$.

в) Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) dx$

а) $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in S'(\mathbb{R})$

б) $\varphi \in S(\mathbb{R})$

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2)\cdot\varphi(\xi) e^{ix\xi} d\xi\, dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2) e^{ix\xi} dx\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \int_{-1}^{1} (1-x^2)\cdot \cos(x\xi)\, dx\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \frac{4}{\xi^3}\left(\sin\xi - \xi\cos\xi\right) d\xi$$

$$\boxed{\begin{aligned} &(*)\ \text{Фубини:} \\ &\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|(1-x^2)\varphi(\xi) e^{ix\xi}\right| d\xi\, dx = \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(\xi)|\, d\xi < +\infty \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f](\xi) = \underbrace{2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^3}}_{g(\xi)}$$

в) $f(\xi) = \mathcal{F}^{-1}[g]$

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[g], \varphi \rangle = \langle g, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \, dx =$$

$\varphi \in S(\mathbb{R})$

домаћи: оправдати функција

$$\overset{\circledast}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}}_{\text{парна}} \underbrace{e^{-ix\xi}}_{\underbrace{\cos(x\xi)}_{\text{парна}} + i \underbrace{\sin(x\xi)}_{\text{непарна}}} dx \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot 2 \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cos(x\xi) \, dx \, d\xi =$$

$$= \left\langle \frac{4}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cos(x\xi) \, dx \, , \, \varphi(\xi) \right\rangle$$

$$\Rightarrow f(x) = (1-x^2) \cdot \chi_{[-1,1]}(x) = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cos(x\xi) \, dx$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}: \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x\right) dx = -\frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{8}.$$

9 Нека је θ Хевисајдова дистрибуција и $a > 0$.

а) Доказати $\mathcal{F}[\theta(x) \cdot e^{-ax}](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a - i\xi}$ (у $S'(\mathbb{R})$).

б) Доказати $\theta(x) e^{-ax} \xrightarrow[a \to 0+]{S'(\mathbb{R})} \theta(x)$.

в) Наћи $\mathcal{F}[\theta]$.

г) Покушати в) из чињенице $\theta' = \delta$.

а) $\varphi \in S(\mathbb{R})$, $f_a(x) = \theta(x) \cdot e^{-ax}$

домаћи: $f_a \in S'(\mathbb{R})$

домаћи: оправдати функција

$$\langle \mathcal{F}[f_a], \varphi \rangle = \langle f_a, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} \cdot e^{ix\xi} dx \, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{e^{x(i\xi-a)}}{i\xi-a}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{0-1}{i\xi-a}\,d\xi = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a-i\xi}, \varphi(\xi)\right\rangle$$

б) $\varphi\in S(\mathbb{R})$

$$\lim_{a\to0+}\langle f_a,\varphi\rangle = \lim_{a\to0+}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cdot\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\lim_{a\to0+} e^{-ax}\cdot\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \langle\theta,\varphi\rangle$$

$$\left|e^{-ax}\cdot\varphi(x)\right| \le 1\cdot\frac{C}{1+x^2} \Rightarrow \text{може ТДК}$$

г) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \mathcal{F}[\delta] = \mathcal{F}[\theta'] = -i\xi\cdot\mathcal{F}[\theta]$

$\mathcal{F}[\theta]$ је дистрибуција која помножена са $\xi\mapsto i\xi$ даје $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. ???

можда има и више таквих ...

в) $\mathcal{F}$ непрекидна на $S'(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathcal{F}[\theta] = S'(\mathbb{R})\text{-}\lim\limits_{a\to0+} \mathcal{F}\left[e^{-ax}\cdot\theta(x)\right] =$

$$= S'(\mathbb{R})\text{-}\lim_{a\to0+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a-i\xi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\delta + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\cdot P\frac{1}{\xi}$$

формула Сохоцког: погледати списак