Задаци за испит из ДПЈБ и ПЈ 2022/2023

професор: др Игор Уљаревић
асистент: Душан Дробњак

1. Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ област и нека је $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Доказати да је $d(\operatorname{supp}(\varphi), \partial\Omega) > 0$. (са d је означена стандардна метрика на $\mathbb{R}^n$)

2. Доказати да је нула функција једина тест функција из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ која је аналитичка. У којим тачкама се нарушава аналитичност? (под аналитичким функцијама овде мислимо на оне функције f чији је Тејлоров ред око сваке тачке $x_0 \in \mathbb{R}$ једнак функцији f на некој околини од x_0)

3. Циљ овог задатка је конструисати тест функцију $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ са носачем у $[-1,1]$ за коју важи $f^{(n)}(0) = a_n$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$, за дати низ реалних бројева $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

   (а) Доказати да постоји $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ са носачем у $[-1,1]$ тако да је $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Доказати да постоји решење $y(x)$ диференцијалне једначине $y'(x) = \varphi(-x) - \varphi(x)$ тако да $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ са носачем у $[-1,1]$. Доказати да је $y^{(n)}(0) = 0$, за свако $n \in \mathbb{N}_0$.

   (б) Нека је $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ произвољан низ реалних бројева. За $n \in \mathbb{N}_0$ и низ бројева $\varepsilon_n > 0$ дефинишемо низ функција
   $$y_n(x) = y\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)\frac{a_n x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Доказати да је $y_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ са носачем у $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ и $y_n^{(j)}(0) = a_n\delta_{nj}$, за свако $j \in \mathbb{N}_0$, где је δ_{nj} Кронекерова делта.

   (в) Доказати да се за свако $n \in \mathbb{N}_0$ може изабрати ε_n довољно мало тако да
   $$|y_n^{(j)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
   важи за свако $x \in \mathbb{R}$ и свако $0 \leqslant j < n$.

   (г) Фиксирајмо ε_n (и y_n) из дела (в) и дефинишимо
   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
   Доказати да је $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ са носачем у $[-1,1]$ и да је $f^{(n)}(0) = a_n$, за све $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Нека је $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дата са
   $$\rho(x) = \begin{cases} c_n \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geqslant 1, \end{cases}$$
   где је константа $c_n > 0$ изабрана тако да је $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Нека су функције ρ_ε за $\varepsilon > 0$ дефинисане као
   $$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

   (а) Доказати да $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и да $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Шта је $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon)$?

   (б) Нека је $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ произвољна и дефинишимо
   $$\Phi_\varepsilon(x) = (\rho_\varepsilon * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$
   Доказати да $\Phi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \varphi$.

   Напомена: Фамилија функција $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ се назива *апроксимација јединице.*

5. За $r > 0$ и функцију $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (из $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$) дефинишемо дилатацију d_r као $(d_r\varphi)(x) = \varphi(rx_1, rx_2, \ldots, rx_n)$.

(а) Дефинишимо $\langle d_r(\psi), \varphi\rangle = r^{-n}\langle \psi, d_{r^{-1}}(\varphi)\rangle$ за дистрибуцију ψ. Доказати да ова дефиниција проширује дефиницију дилатације на дистрибуције ψ које су настале од функције.

(б) Доказати да је дистрибуција $f(x) = \|x\|^t$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, за $t > -n$ хомогена степена t. То по дефиницији значи да важи $d_r(f) = r^t f$.

(в) Нека су $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ дате са

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{и}$$

$$\langle g, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,\mathrm{d}x.$$

Доказати да је f хомогена степена -1, али да g није хомогена степена -1.

(г) Доказати да је $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ хомогена степена $-n$. Да ли је $\frac{\partial \delta}{\partial x_1}$ хомогена неког степена?

6. Дефинишимо $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$ за функцију $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нека је $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и дефинишимо $\langle \tilde{f}, \varphi\rangle = \langle f, \tilde{\varphi}\rangle$ за дистрибуцију $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Дистрибуцију f зовемо парна ако је $f = \tilde{f}$ и непарна ако је $f = -\tilde{f}$.

   (а) Доказати да је ова дефиниција конзистентна за дистрибуције дефинисане функцијом, тј. $\widetilde{T_f} = T_{\tilde{f}}$.

   (б) Шта је $\tilde{\delta}$?

   (в) Доказати да се свака дистрибуција на јединствен начин може представити као збир једне парне и једне непарне дистрибуције.

   (г) Доказати да је $\langle f, \varphi\rangle = 0$ ако је f парна и φ непарна, или ако је f непарна и φ парна.

7. Доказати да линијски интеграл $\displaystyle\int_C \varphi\,\mathrm{d}s$ дуж глатке компактне криве C у равни дефинише дистрибуцију на $\mathbb{R}^2$. Формулисати и доказати аналогно тврђење за површински интеграл над глатком компактном површи у $\mathbb{R}^3$.

8. Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ област и нека је $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Нека су $f, f_j \in L^1(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}$. Доказати да ако $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{L^1(\Omega)} f$, онда $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}'(\Omega)} f$. Примером показати да друга импликација не важи.

9. Доказати да у простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ комплексних дистрибуција (мисли се на дистрибуције које пресликавају скуп $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ у скуп $\mathbb{C}$) важи следећа *формула Сохоцког*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mp i\pi\delta + \mathcal{P}\tfrac{1}{x}.$$

10. Нека је $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ дато. За $h \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ дефинишемо $\varphi_h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ као $\varphi_h(x) = \varphi(x-h)$ и $T_h\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ као $T_h(\varphi) = T(\varphi_h)$.

   (а) Доказати да је $T_h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

   (б) Доказати да у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ важи $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{T_h - T}{h} = T'$.

11. Нека је $U\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ функција дата са

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\|(x,y,z)\|}.$$

   (а) Доказати да је $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

   (б) Доказати да у $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ важи $\Delta U = -4\pi\delta$.

Помоћ: Лапласијан у сферним координатама (r,θ,φ) датим са

$$(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta),\quad r\in[0,\infty),\, \theta\in[0,\pi],\, \varphi\in[0,2\pi),$$

у $\mathbb{R}^3$ се изражава као

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

12. Нека је $n\in\mathbb{N}$. Доказати да је са

$$y=c_0\delta+c_1\delta'+\ldots+c_{n-1}\delta^{(n-1)},\quad c_1,\ldots,c_{n-1}\in\mathbb{R}$$

дато опште решење једначине $x^n y(x)=0$ у $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

13. Нека су $a,b\in C^\infty(\mathbb{R})$ и нека је $v\in C^\infty(\mathbb{R})$ решење Кошијевог проблема

$$u''+au'+bu=0,\quad u(0)=0,\, u'(0)=1.$$

Доказати да је $v\theta$ решење једначине

$$u''+au'+bu=\delta$$

у простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, где је са θ означена Хевисајдова дистрибуција.

14. Нека је $n\in\mathbb{N}$. Решити диференцијалну једначину $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}y^{(k)}=\theta$ у простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, где је са θ означена Хевисајдова дистрибуција.

15. Нека је χ_B карактеристична функција јединичне лопте $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant 1\}\subseteq\mathbb{R}^2$ и $\overrightarrow{n_x}$ јединични вектор дуж $x-$осе . Доказати да је

$$\langle\frac{\partial\chi_B}{\partial x},\varphi\rangle=-\int_{\partial B}\varphi(x,y)\langle(x,y),\overrightarrow{n_x}\rangle\,\mathrm{d}s,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Напомена: Ознака $\langle\cdot,\cdot\rangle$ унутар интеграла је стандардни скаларни производ вектора у $\mathbb{R}^2$.

16. Нека је $\Omega=(0,+\infty)$ и дефинишимо

$$\langle\Lambda,\varphi\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}(D^k\varphi)\left(\frac{1}{k}\right),$$

за $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   (а) Доказати да је Λ дистрибуција бесконачног реда на Ω.

   (б) Доказати да се Λ не може продужити до дистрибуције на $\mathbb{R}$, тј. не постоји $\Lambda_0\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ тако да је $\Lambda_0=\Lambda$ на Ω.

17. (а) Ако је $f,g\in L^1(\mathbb{R})$, доказати да је $f*g\in L^1(\mathbb{R})$.

   (б) Дефинишемо $f_\alpha(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$, $\alpha>0$. Доказати $f_\alpha\in L^1(\mathbb{R})$ и да је $f_\alpha*f_\beta=f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, за $\alpha,\beta>0$.

18. Нека је $k\in\mathbb{N}$ и означимо $*f^k=f*f*\ldots*f$ (k пута). Доказати да је примитивна дистрибуција од $*(\delta'-\delta)^k$ једнака $\dfrac{x^{k-1}e^x}{(k-1)!}\theta$, где је са θ означена Хевисајдова дистрибуција.

19. Фуријеова трансформација $\mathcal{F}\colon\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ за Шварцове функције у више димензија дефинише се са

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{i\langle x,\xi\rangle}\mathrm{d}x.$$

Нека је A инвертибилан линеарни оператор у $\mathbb{R}^n$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $g(x)=f(Ax)$.

   (а) Доказати да $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

   (б) Изразити функцију $\mathcal{F}[g]$ у зависности од функције $\mathcal{F}[f]$.

20. Одредити шта све може бити комплексан број λ такав да важи $\mathcal{F}[f]=\lambda f$, за неку ненула дистрибуцију $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Другим речима, одредити све сопствене вредности оператора $\mathcal{F}\colon\mathcal{S}'(\mathbb{R})\to\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.