Час из ДЈБ (М) теорија индекса

⊛ само тврђења и поставке задатака

- Сингуларна тачка векторског поља $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ је она X за коју важи $F(X)=0$.
- Подразумевамо у тврђењима да су сингуларне тачке изоловане.
- Мисли се на неконстантне периодичне орбите, када се помињу периодичне орбите. Константне су еквилибријуми.

(1) Наћи индекс сингуларне тачке $(0,0)$ линеарног векторског поља које задаје ФП:

а) седло б) стабилан чвор в) нестабилан чвор

$\boxed{\text{Т}}$ Индекс просте затворене криве γ једнак је суми индекса сингуларних тачака векторског поља, које се налазе у унутрашњости γ (подразумевамо да γ не пролази кроз сингуларне тачке). Под унутрашњошћу γ мислимо на отворен скуп D такав да је $\partial D=\gamma$ и $\overline{D}$ компактан.

$\boxed{\text{Л}}$ Индекс просте затворене криве без сингуларних тачака у унутрашњости је 0.

(2) Ако систем $X'=F(X)$ има периодичну орбиту γ, доказати да онда он има еквилибријум у унутрашњости од γ.

(3) Нека је R компактан и просто-повезан скуп који је позитивно инваријантан за систем $X'=F(X)$. Доказати да R садржи еквилибријуме овог система.

Скуп R је позитивно инваријантан за систем $X'=F(X)$ акко $\Phi_t(R)\subseteq R, \forall t\geq 0$, где је Φ_t ток векторског поља F

Критеријуми за непостојање периодичне орбите:

(4) (последица (2)) Ако просто-повезана област не садржи еквилибријуме система,

4 (последица 2) Ако просто-повезана област не садржи еквилибријуме система, онда не садржи ни периодичну орбиту.

5 (Бендиксонов критеријум) Нека је R просто-повезана област, функције $f, g : R \to \mathbb{R}$ тд. $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial g}{\partial y}$ непрекидне и $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$ (на R). Тада систем

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

нема периодичну орбиту на R.

6 Доказати да дати системи немају периодичне орбите на $\mathbb{R}^2$:

а) $x' = e^{-y} + x$, $y' = xy + 1$

б) $x' = x^3y^2 + x$, $y' = x^2y^3 + x^2$

в) $x' = y^2$, $y' = x$