Консултације ДЈБ - септембар

1. Нека је $\lambda \neq 0$ и матрица $A \in M_2(\mathbb{R})$ чије су сопствене вредности λ и $\frac{1}{\lambda}$ (рачунајући и потенцијалне вишеструкости). У зависности од матрице A, одредити линеарну, тополошку и диференцијабилну еквиваленцију система $X' = AX$ и $X' = e^A X$.

$$A \sim \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & \\ & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}}_{=J} \quad \text{или} \quad A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \ , \lambda = \pm 1$$

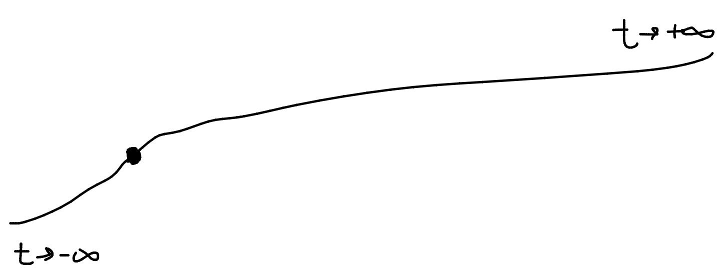
$$e^J = \begin{bmatrix} e^{\lambda} & \\ & e^{\frac{1}{\lambda}} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda \Leftrightarrow Д \Leftrightarrow \perp$$

$$\{\lambda, \tfrac{1}{\lambda}\} = \{e^{\lambda}, e^{\frac{1}{\lambda}}\}$$

$$\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{\frac{1}{\lambda}} \Rightarrow e^{\overbrace{\lambda + \frac{1}{\lambda}}^{=0}} = 1$$

Т акко $\lambda > 0$



$$X' = F(X)$$
$$\Updownarrow$$
$$X' = -F(X)$$

2. Дата је парцијална диференцијална једначина $y^3 \frac{\partial z}{\partial x} - x^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

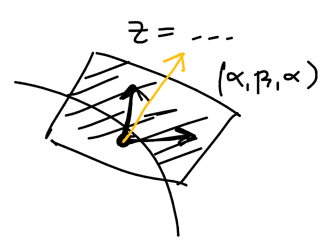
(а) Доказати да је $z = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}$ решење дате парцијалне диференцијалне једначине такво да је $z = x + y$ тангентна раван на график решења $\Gamma(z) \subset \mathbb{R}^3$ у тачки $(1, 1, 2)$.

(б) Наћи сва решења дате парцијалне диференцијалне једначине чија је тангентна раван графика $\Gamma(z) \subset \mathbb{R}^3$ у тачки $(1, 1, 1)$ једнака $\boxed{z = x.}$

$$\Psi_1 = x^4 + y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 0$$



$$z = \varphi(x^4 + y^4)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x^4+y^4) \cdot 4x^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x^4+y^4)\cdot 4x^3$$

1. (а) Дата је матрица $P \in M_4(\mathbb{R})$ облика $P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, где су $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ које комутирају у односу на множење. Одредити e^{xP} у зависности од e^{xA} и e^{xB}.

   (б) Решити систем диференцијалних једначина $X' = CX$, где је $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$, одређивањем матричне експоненцијалне функције e^{xC}.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{xM}$$

$$M^{2n} = \dots = \begin{bmatrix} B^{2n} & \\ & B^{2n} \end{bmatrix}$$

$$M^{2n+1} = \dots = \begin{bmatrix} & B^{2n+1} \\ B^{2n+1} & \end{bmatrix}$$

$$\sum \frac{x^{2n}B^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^{xB} = \Pi + H$$

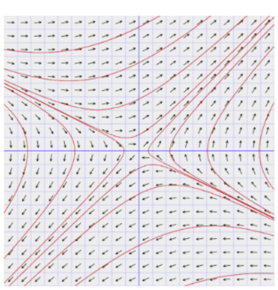
$$e^{-xB} = \Pi - H \rightarrow (e^{xB})^{-1}$$

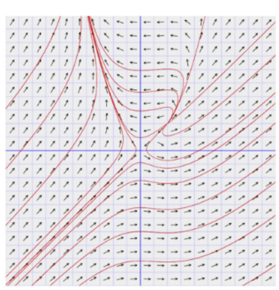
$$\Pi = \frac{e^{xB}+e^{-xB}}{2} = \cancel{ch(xB)}$$

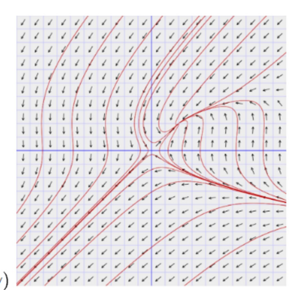
2. Дати су динамички системи:

(1) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_1^2 - x_1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ -x_1^2 - x_1 \end{bmatrix}$; (3) $\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 \end{bmatrix}$;

и фазни портрети у области $[-5,5] \times [-5,5]$:


(α)


(β)


(γ)

(а) Спојити системе (1) – (3) са одговарајућим фазним портретима (α) – (γ), знајући да је упаривање бијективно. Неки од фазних портрета могу бити заротирани у односу на реалну ситуацију. Образложити одговоре.

(α)  (β)  (γ) 

(а) Спојити системе (1) – (3) са одговарајућим фазним портретима (α) – (γ), знајући да је упаривање бијективно. Неки од фазних портрета могу бити заротирани у односу на реалну ситуацију. Образложити одговоре.

(б) Одредити за који угао је потребно заротирати дате фазне портрете тако да представљају фазне портрете који одговарају системима из задатка.