1. Дат је нелинеаран систем диференцијалних једначина

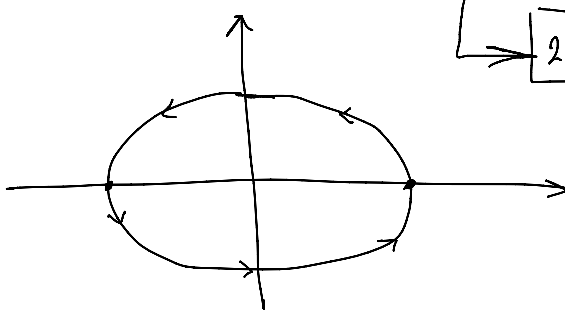
$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1^2x_2 - x_1\overset{0}{E(x_1,x_2)} \quad /\cdot 2x_1 \\ x_2' &= -2x_1^3 - x_2\underset{0}{E(x_1,x_2)}, \quad /\cdot 4x_2 \end{aligned} \Bigg\} + \quad 0 = 8x_1^3x_2 - 8x_1^3x_2 ✓$$

где је $E(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4$.

(a) Доказати да скуп тачака $E(x_1,x_2) = 0$ представља једну фазну трајекторију датог система.

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 4 = 0 \quad /'$$

$$\boxed{2x_1x_1' + 4x_2x_2' = 0}$$



$\int f(x)dx$ --- ✓

$\boxed{\int y dx}$ X

$$\rightarrow \int \boxed{ydx + xdy} = \int d(xy) = xy + c$$

$$3(x-6)^2y'' + \underbrace{25(x-6)y' - 16y}_{G(x,t)} = \underbrace{\boxed{x-16}}_{f(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(4) + 3y'(4) &= 1 \\ y'(5) + 8 &= 8y(5) \end{aligned}}$$

нехомогени

$u = y - y_0$

$y_0 = ax + b$

$4a + b + 3a = 1$

$a + 8 = 8(a\cdot 5 + b)$

$7a + b = 1$

$+39a + 8b = +8$

$a = 0$

$\boxed{b = 1}$

$$\boxed{y_0 = 1}$$

$$\Phi(x) = e^{xA} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{y' = Ay}}$$

$$\Phi'(x) = A\,\Phi(x) \quad / \cdot \Phi^{-1}(x)$$

$$x y' = y - z$$

$$x y z' = -z^2$$

$$\rightsquigarrow$$

$$y y'' + y y' - y^2 - (y')^2 = 0 \quad / : y^2$$

$$\frac{y y'' - (y')^2}{y^2} + \underbrace{\frac{y'}{y}}_{u} - 1 = 0$$

$$u' + u - 1 = 0 \checkmark$$

$$\left(\overset{u}{\frac{y'}{y}}\right)' = \frac{y'' y - (y')^2}{y^2}$$

$$A^2 \cdot e^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad / \det$$

$$\underbrace{\left(\det(A)\right)^2}_{\geq 0} \cdot \det(e^A) = -2 \qquad \lightning$$

$$\det(e^A) = \underbrace{e^{\operatorname{tr} A}}_{> 0}$$

$$\left(y(x+y)^3 + z\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left(x(x+y)^3 - z\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z(x+y)$$

$$\left(y(x+y)^3+z\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\left(x(x+y)^3-z\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z(x+y)$$

$$\frac{dx}{\dots}=\frac{dy}{\dots}=\frac{dz}{\dots}$$

$$\frac{x\,dx-y\,dy}{xz+yz}=\frac{dz}{z(x+y)}$$

$$\frac{\overbrace{dx+dy}^{=d(x+y)}}{(x+y)^4}=\frac{dz}{z(x+y)}$$

5. Скицирати поље праваца и интегралне криве диференцијалне једначине $x'=\frac{2t}{x}$, не решавајући је. Посебно издвојити (означити) на скици по један пример за следећа решења (у смислу реалних функција):

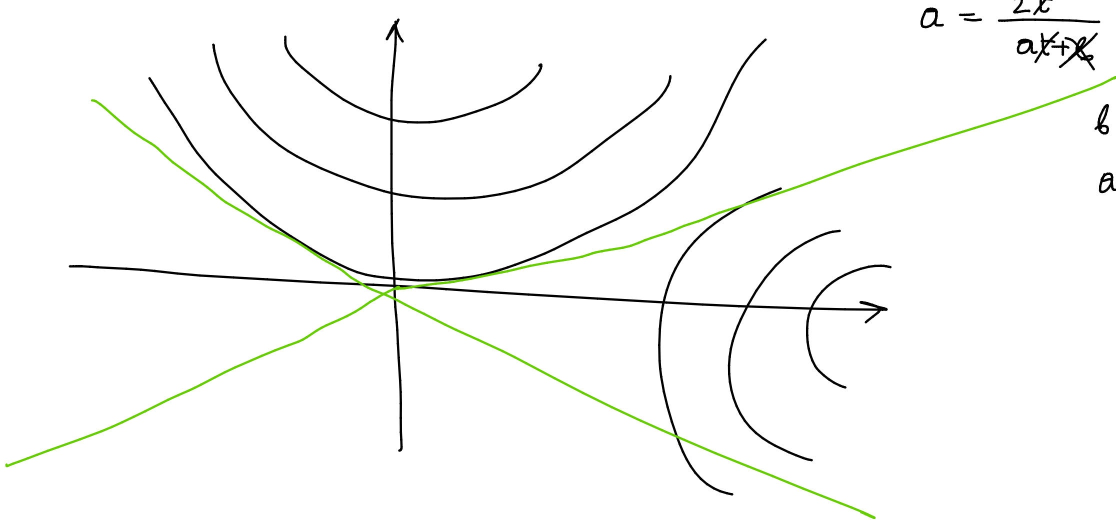
(а) Решење које је дефинисано за свако $t\in\mathbb{R}$;

(б) Решење које је део праве.

За које захтеве од (а) и (б) постоји јединствено решење, а за које више њих?

$x=at+b$

$a=\frac{2\cancel{t}}{a\cancel{t}+\cancel{b}}$



$b=0$

$a=\pm\sqrt{2}$

11. Наћи опште решење диференцијалне једначине

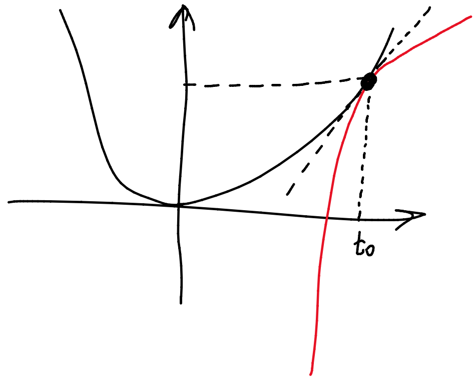
$$2\sqrt{xt}=\frac{x-tx'}{x}$$

на области $\{t>0,x>0\}$. Наћи и партикуларно решење које тангира параболу $x=t^2$.

$x(t) = \dots c$

c, t_0

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) &= t_0^2 \\ x'(t_0) &= 2t_0 \end{aligned}\right\}$$



$$(x'+1)\ln\left(\frac{x+t}{t+3}\right) = \frac{x+t}{t+3}$$

1) $\dfrac{a_1x+b_1t+\cancel{c_1}}{\cancel{a_2}x+b_2t+c_2}$ - - - - $x = u+\alpha$, $t = v+\beta$ ...

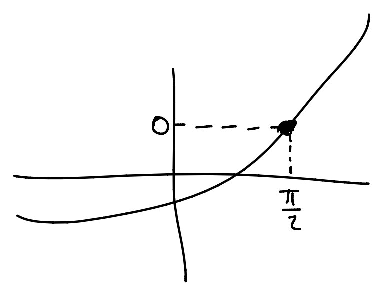
2) $x+t = y$

$y' = x'+1$

3) тот. диференцијал

7. Наћи решење диференцијалне једначине $tx' = \sin t - 2x$ које пролази кроз тачку $\boxed{(\pi/2, 0)}$. Који је интервал дефинисаности тог решења?

$$x' = -\frac{2x}{t} + \frac{\sin t}{t}$$ линеарна



$$x'(t) = p(t)\cdot x(t) + q(t)$$

$$x(t) = \frac{c - t\cos t - \sin t}{t^2}$$

$x(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\frac{c - \frac{\pi}{2}\cdot 0 - 1}{\frac{\pi^2}{4}} = 0 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$x(t) = \frac{1 - t\cos t - \sin t}{t^2}$$

$t \neq 0$

$\boxed{t > 0}$

$\boxed{t>0}$

$\frac{\pi}{2}\in(0,+\infty)$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R} \ni \frac{3}{2}A = y(0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2c_2 \\ -5c_1+6c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{3t}}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

6. Решити диференцијалну једначину $3x^3 - e^{-3tx} + (2x + 3tx^2)x' = 0$, а затим наћи партикуларно решење које је тангентно на праву $x = 1$.

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) &= 1 \\ x'(t_0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$