4. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

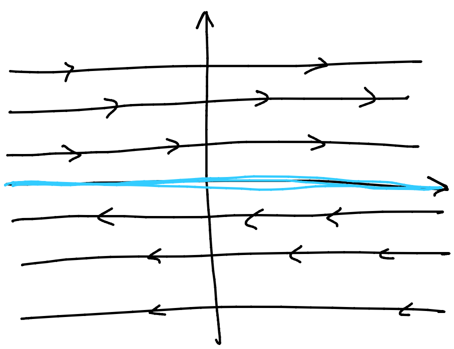
(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (2) $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(1) $x_1' = 2x_2$
$x_2' = 0$

$\left.\begin{array}{l} 2x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{array}$

$X^* \in \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

неизоловани еквилибријуми



$x_1' = 2x_2 \Rightarrow x_1' = 2c_1 \Rightarrow x_1 = 2c_1 t + c_2$

$x_2' = 0 \Rightarrow \underline{x_2 = c_1}$

↳ увек су на истој хоризонтали

1) $c_1 > 0$: $x_1 = 2c_1 t + c_2 \nearrow$ крећу се надесно

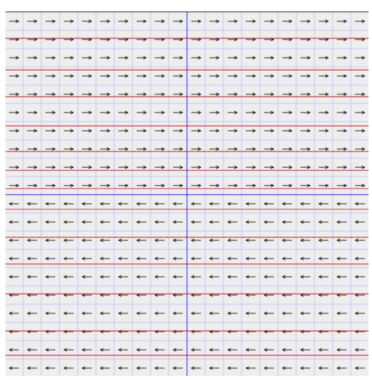
$t \to -\infty: x_1 \to -\infty$

$t \to +\infty: x_1 \to +\infty$

2) $c_1 < 0$: $x_1 = 2c_1 t + c_2 \searrow$ крећу се налево

$t \to -\infty: x_1 \to +\infty$

$t \to +\infty: x_1 \to -\infty$



2. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и нека је $a \neq \pm b$. Свести диференцијалну једначину $y'' + 2ay' + b^2 y = 0$ на систем диференцијалних једначина. У зависности од параметара a и b испитати тип еквилибријума и скицирати фазне портрете.

↳ за вежбу (узмите по 1 пар параметара у сваком од случајева)

$y'' + 2ay' + b^2 y = 0$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = -2a\underbrace{y'}_{=x_2} - b^2\underbrace{y}_{=x_1} = -2ax_2 - b^2 x_1 \end{array}$

$X' = AX, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = 0$

$(-\lambda)(-2a - \lambda) + b^2 = 0$

$\lambda^2 + 2a\lambda + b^2 = 0$

$$D = (2a)^2 - 4b^2 = 4(a^2 - b^2) \neq 0$$

1° $D > 0$, $a^2 - b^2 > 0$, $\lambda_{1/2} = \frac{-2a \pm \sqrt{D}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$

2° $D < 0$, $a^2 - b^2 < 0$, $\lambda_{1/2} = \frac{-2a \pm i\sqrt{-D}}{2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2}$

$X^* = ?$ $\quad AX = 0 \quad \left.\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ -b^2 x_1 - 2a x_2 = 0 \end{array}\right\} \; b^2 x_1 = 0 \begin{array}{l} \nearrow b \neq 0 : \; X^* = (0,0) \\ \searrow b = 0 : \; X^* \in \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{array}$

1° $a^2 - b^2 > 0$

1.1° $b = 0$: $a^2 > 0$, $X^* \in \{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ – неизоловани еквилибријуми

$X^* = (0,0)$ $\to$ 1.2° $b \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2} \\ \lambda_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2} \end{array}\right. \Rightarrow \lambda_1 > \lambda_2 \; (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$1.2.1^\circ$ $a > 0$: $\lambda_2 < 0$ сваканко

$$\lambda_1 < 0 \iff -a + \sqrt{a^2 - b^2} < 0 \iff \sqrt{a^2 - b^2} < a \; /^2 \quad (\text{обе стране } > 0)$$

$$\iff a^2 - b^2 < a^2$$

$$\iff -b^2 < 0 \; \text{T}$$

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ – стабилан чвор

$1.2.2^\circ$ $a = 0$: $a^2 - b^2 = 0^2 - b^2 = -b^2 < 0$ ↯

$1.2.3^\circ$ $a < 0$: $\lambda_1 > 0$ сваканко

$$\lambda_2 \leq 0 \iff -a - \sqrt{a^2 - b^2} \leq 0 \iff -a \leq \sqrt{a^2 - b^2} \; /^2 \quad (\text{обе стране } > 0)$$

$$\iff a^2 \leq a^2 - b^2$$

$$\iff 0 \leq -b^2 \; \perp$$

$\Rightarrow \lambda_2 > 0$

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ – нестабилан чвор

2° $a^2 - b^2 < 0$, $\lambda_1 = -a + i\sqrt{b^2 - a^2}$ $\quad (\mathrm{Im}(\lambda_{1/2}) \neq 0)$

$\lambda_2 = -a - i\sqrt{b^2 - a^2}$

2° $a^2-b^2<0$, $\lambda_1 = -a + i\sqrt{b^2-a^2}$
$\lambda_2 = -a - i\sqrt{b^2-a^2}$ $\quad (Im(\lambda_{1/2}) \neq 0)$

2.1° $Re(\lambda_{1/2}) = 0 = -a \Rightarrow a = 0$ – центар

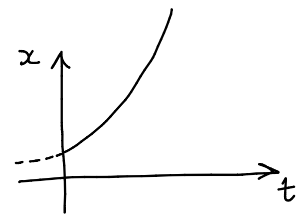
2.2° $Re(\lambda_{1/2}) < 0 \Rightarrow a > 0$ – стабилна спирала

2.3° $Re(\lambda_{1/2}) > 0 \Rightarrow a < 0$ – нестабилна спирала

Компетитивне врсте – еколошки модел

x – број јединки

ако нема ограничења: $x' = ax$, $a>0$, $x(t) = e^{at}\cdot x(0)$



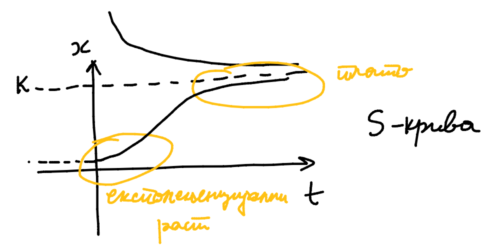
експоненцијалан раст

K – идеална величина популације (капацитет станишта) $K>0$

$$x' = ax\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

$x = K \Rightarrow x' = 0$

„логистички модел"



$\sim x\cdot x$ – такмичење унутар врсте („број сусрета")

2 врсте без интеракција: (врсте x са врстом y)

$$x' = r_1 x\left(1-\frac{x}{K_1}\right)$$
$$y' = r_2 y\left(1-\frac{y}{K_2}\right)$$
независне ДЈ

уводимо интеракцију: $\sim x\cdot y, \sim y\cdot x$

$\alpha_{12}, \alpha_{21} > 0$ мере јачину интеракције y према x и x према y
(α_{12}) (α_{21})

$$x' = r_1 x\left(1-\frac{x}{K_1} - \frac{\alpha_{12}}{r_1}y\right)$$
$$y' = r_2 y\left(1-\frac{y}{K_2} - \frac{\alpha_{21}}{r_2}x\right)$$

може да се упрости: $a_{12} = \frac{\alpha_{12}K_2}{r_1}$, $a_{21} = \frac{\alpha_{21}K_1}{r_2}$, $\rho = \frac{r_2}{r_1}$

смене пром.: $x \rightsquigarrow \frac{x}{K_1}$, $y \rightsquigarrow \frac{y}{K_2}$, $t \rightsquigarrow r_1 t$

добије се
$$x' = x(1-x-a_{12}y)$$
$$y' = \rho y(1-y-a_{21}x)$$
, $\rho, a_{12}, a_{21} > 0$

← домаћи: показати ово

Еквилибријуми: $x'=y'=0$ $\quad x(1-x-a_{12}y)=0 \wedge \rho y(1-y-a_{21}x)=0$

$x=0$: $\quad y(1-y)=0 \Rightarrow y \in \{0,1\}$

$y=0$: $\quad x(1-x)=0 \Rightarrow x \in \{0,1\}$

$X_1=(0,0)$

$X_2=(1,0)$

$X_3=(0,1)$

$x \neq 0, y \neq 0$: $\quad \left.\begin{array}{l} x+a_{12}y=1 \\ y+a_{21}x=1 \end{array}\right\}$ -- --- $\Rightarrow X_4 = \left(\frac{1-a_{12}}{1-a_{12}a_{21}}, \frac{1-a_{21}}{1-a_{12}a_{21}}\right)$

(*) занемарујемо случајеве када је $a_{12}=1 \vee a_{21}=1 \vee a_{12}a_{21}=1$
(да би било мање случајева)

x, y – број јединки $\Rightarrow x \geq 0, y \geq 0 \rightsquigarrow$ посматрамо динамику у $\{x \geq 0, y \geq 0\}$

Испоставља се да су од интереса случајеви:

I) $a_{12}<1 \wedge a_{21}<1$

II) $a_{12}>1 \wedge a_{21}>1$

III) $a_{12}<1 \wedge a_{21}>1$

IV) $a_{12}>1 \wedge a_{21}<1$

Урадићемо I) детаљније:

нпр. $\quad a_{12}=\frac{1}{3}, a_{21}=\frac{1}{2}, \rho=1$

$$x' = x\left(1-x-\frac{y}{3}\right)$$
$$y' = y\left(1-y-\frac{x}{2}\right)$$

Еквилибријуми:

$X_1=(0,0)$

$X_2=(1,0)$

$X_3=(0,1)$

$X_4=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

По осама: $x=0$: $\quad 0'=0\cdot(--)$ ✓

$y'=y(1-y)$

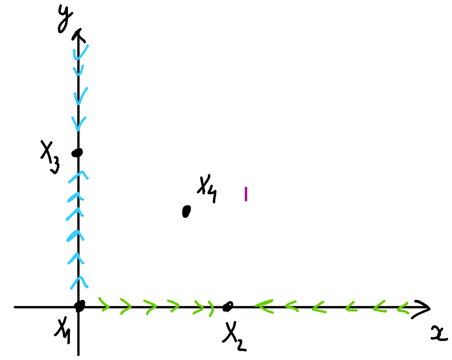
По осама: $x=0$: $\quad 0'=0\cdot(--)$ ✓

$$y'=y(1-y)$$

$$y'>0 \iff y\in(0,1)$$

$$y'<0 \iff y>1$$

$y=0$: $\quad x'=x(1-x)$



систем је нелинеаран! $\quad X'=F(X) \rightsquigarrow X'=AX$ „апроксимацију"

линеаризација система у околини еквилибријума

X^* – еквилибријум: $\quad F(X)=\overset{0}{F(X^*)}+dF(X^*)\cdot(X-X^*)+o(---)$

$$F(X)\approx \underset{A}{\underset{\|}{\boxed{dF(X^*)}}}\cdot(X-X^*)$$

$$X'=F(X) \rightsquigarrow X'=dF(X^*)\cdot(X-X^*)$$

$$dF(X^*)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*) \end{bmatrix}$$

$$F=(F_1,\dots,F_n)$$

$$x=(x_1,\dots,x_n)$$

$\boxed{T}$ Ако је X^* еквилибријум и $dF(X^*)$ нема сопствених вредности λ т.д. $\mathrm{Re}(\lambda)=0$, онда фазни портрет од $X'=F(X)$ „личи на" фазни портрет од $X'=dF(X^*)\cdot\underset{\sim}{(X-X^*)}$ у околини X^*.

ово само транслира из $(0,0)$ у X^*

$$F(x,y)=\Big(\overset{F_1}{\overset{\|}{x\left(1-x-\tfrac{y}{3}\right)}},\ \overset{F_2}{\overset{\|}{y\left(1-y-\tfrac{x}{2}\right)}}\Big)$$

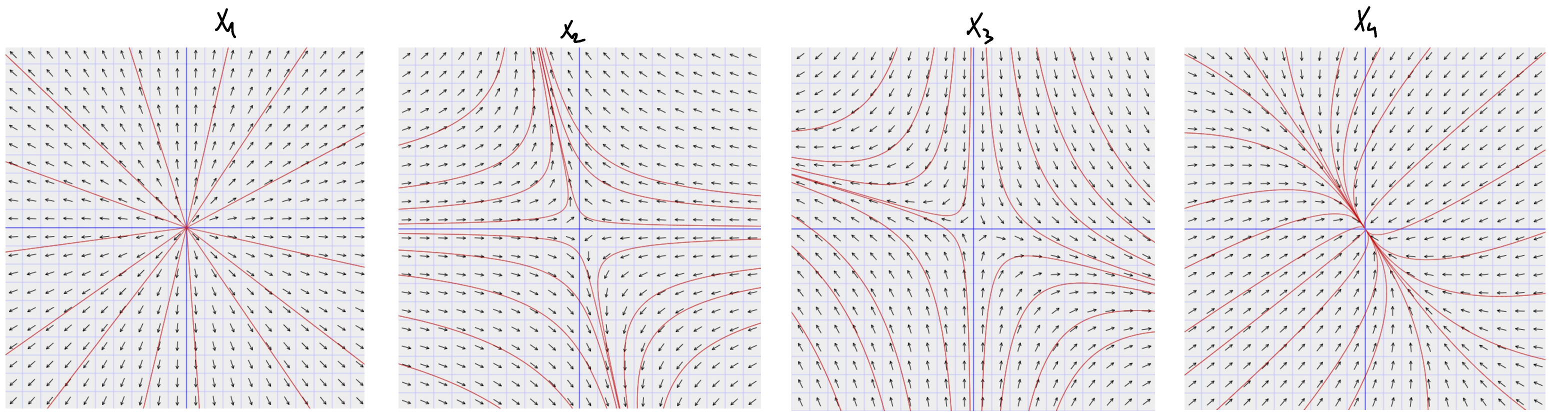
$$dF(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-2x-\frac{y}{3} & -\frac{x}{3} \\ -\frac{y}{2} & 1-2y-\frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

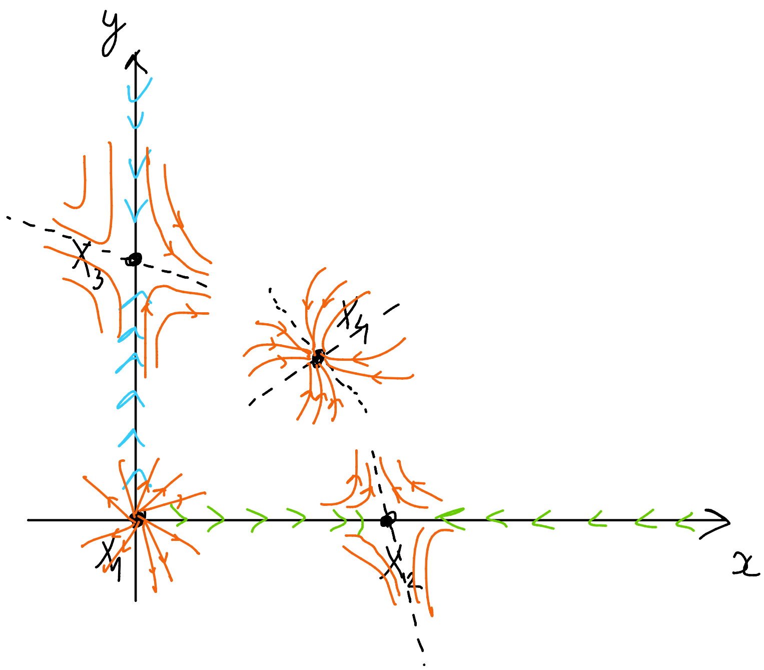
$X_1=(0,0)$: $\quad A_1=dF(0,0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda_1=\lambda_2=1$ – нестабилна звезда

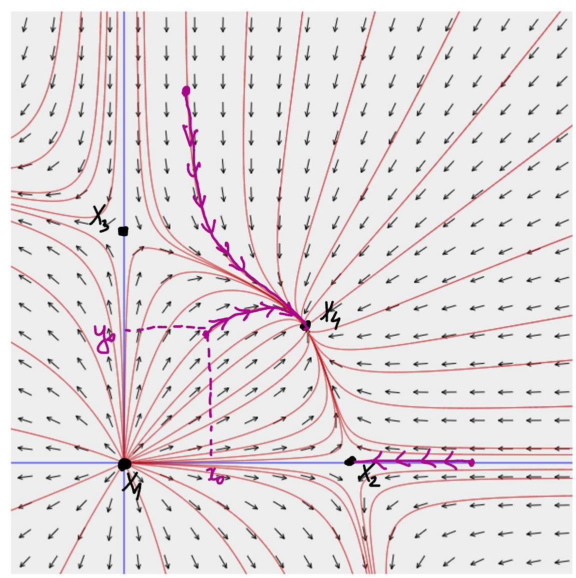
$X_2=(1,0)$: $\quad A_2 = dF(1,0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\frac{1}{2}$ – седло

$X_3=(0,1)$: $\quad A_3 = dF(0,1) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1=\frac{2}{3},\ \lambda_2=-1$ – седло

$X_4=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$: $\quad A_4 = dF\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-\frac{2}{5}$ – стабилан чвор







$$\forall x(0), y(0) > 0 \Rightarrow (x(t), y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} X_4$$

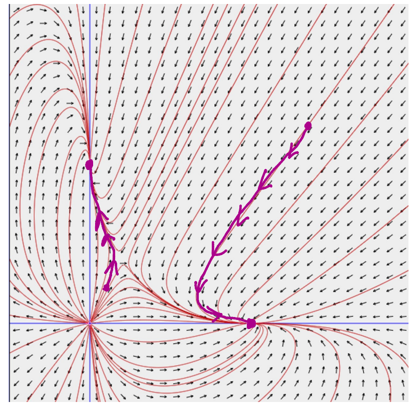
$a_{12}, a_{21} < 1$ – такмичење није довољно јако и обе врсте опстају, али у мањем броју него да су саме   коегзистирајуће врсте

II) изумирање врсте

нпр. $x' = x(1 - x - 2y)$

$y' = y(1 - y - 3x)$

увек једна врста изумре, а која зависи од почетног стања



III) и IV) истребљење

нпр. $x' = x\left(1 - x - \frac{y}{2}\right)$

$y' = y(1 - y - 3x)$

увек једна врста изумре, а која не зависи од почетног стања