① $A\in M_2(\mathbb{R})$, $B=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$, $e^{xA}=\begin{bmatrix}e^x&0\\-3e^x+3e^{2x}&e^{2x}\end{bmatrix}$.

Дат је систем $Y'=B^{-1}ABY+D(x)$

а) $D(x)\equiv 0$, решити систем.

б) Одредити $B^{-1}AB$.

в) $D(x)=\begin{bmatrix}1\\e^x\end{bmatrix}$, решити систем.

а) хомоген систем $Y'=B^{-1}ABY \rightsquigarrow$ ОР: $Y(x)=e^{xB^{-1}AB}\cdot c$, $c\in\mathbb{R}^2$

$$Y(x)=e^{xB^{-1}AB}\cdot c=B^{-1}e^{xA}B\cdot c=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^x&0\\-3e^x+3e^{2x}&e^{2x}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\cdot c=\dots=\begin{bmatrix}7e^x-6e^{2x}&14e^x-14e^{2x}\\-3e^x+3e^{2x}&-6e^x+7e^{2x}\end{bmatrix}\cdot c,\ c\in\mathbb{R}^2.$$

б) $B^{-1}AB=P$

$$\Rightarrow e^{xP}=\begin{bmatrix}7e^x-6e^{2x}&14e^x-14e^{2x}\\-3e^x+3e^{2x}&-6e^x+7e^{2x}\end{bmatrix}$$

$$P\ \overset{?}{\leftarrow}\!\!\rightsquigarrow\ e^{xP}$$

$\Phi(x)$ – фундаментална матрица $Y'=A(x)\cdot Y$, важи $\Phi'(x)=A\Phi(x)$, $W(x)=\det\Phi(x)\neq 0$

$\rightsquigarrow \varphi_1,\dots,\varphi_n$ – решења $\Rightarrow [\varphi_1' \dots \varphi_n']=A\cdot[\varphi_1 \dots \varphi_n]$

$\forall k,\ \varphi_k'=A\varphi_k$

за ЛСДЈКК: e^{xA} је једна фунд. матр.

1) $\Phi'(x)=\frac{d}{dx}(e^{xA})\overset{①}{=}A\cdot e^{xA}=A\Phi(x)$

2) $W(x)=\det\Phi(x)=\det(e^{xA})\overset{④}{=}e^{tr(xA)}\neq 0$

$\Phi'(x)=A(x)\Phi(x)\ /\cdot\Phi^{-1}(x)$ (јер $W(x)\neq 0$)

$A(x)=\Phi'(x)\Phi^{-1}(x)$

$\Phi(x)=e^{xP}$ је фунд. $\Rightarrow P=\Phi'(x)\cdot\Phi^{-1}(x)$

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix}7e^x-6e^{2x}&14e^x-14e^{2x}\\-3e^x+3e^{2x}&-6e^x+7e^{2x}\end{bmatrix}$$

$$\Phi'(x)=\begin{bmatrix}7e^x-12e^{2x}&14e^x-28e^{2x}\\-3e^x+6e^{2x}&-6e^x+14e^{2x}\end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(x) = (e^{xP})^{-1} \underset{\text{за вежбу}}{=} e^{-xP} = \Phi(-x) = \begin{bmatrix} 7e^{-x} - 6e^{-2x} & 14e^{-x} - 14e^{-2x} \\ -3e^{-x} + 3e^{-2x} & -6e^{-x} + 7e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}AB = P = \ldots = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

в) (може и без б)

$$y(x) = \Phi(x) \cdot \left(C + \int \Phi^{-1}(x) \cdot D(x)\, dx \right)$$

$$\vdots$$

$$y(x) = \Phi(x) \cdot c + \begin{bmatrix} -4 + e^{x}(14x + 14) \\ \frac{3}{2} + e^{x}(-6x - 7) \end{bmatrix}.$$

② Решити систем

$$x^2 yy' = \frac{y^2}{2} + e^{2z} \quad / \cdot 2$$

$$2x^2 z' = -3\frac{y^2}{e^{2z}} - 4 \quad / \cdot e^{2z}$$

$$x^2 (2yy') = y^2 + 2e^{2z}$$

$$2x^2 z' e^{2z} = -3y^2 - 4e^{2z}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y^2 \Rightarrow y_1' = (y^2)' = 2yy' \\ z_1 &= e^{2z} \Rightarrow z_1' = (e^{2z})' = e^{2z} \cdot 2z' \end{aligned} \right\} \text{ смене!}$$

$$x^2 y_1' = y_1 + 2z_1$$

$$x^2 z_1' = -3y_1 - 4z_1$$

$$y_1(x) \rightsquigarrow y_1(t)$$

$$z_1(x) \rightsquigarrow z_1(t)$$

$$\frac{d}{dt} z_1 = \frac{dz_1}{dt} = \underbrace{\frac{dz_1}{dx}}_{z_1'} \cdot \frac{dx}{dt} \overset{?}{=} z_1' \cdot x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \rightsquigarrow t = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dt} y_1 = y_1 + 2z_1$$

$$\frac{d}{dt} z_1 = -3y_1 - 4z_1$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}'(t) = A \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \ldots\ e^{tA} = \ldots$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^2$$

$$y_1(t) = c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} \xrightarrow{t \to x} y_1(x) = c_1 e^{\frac{1}{x}} - 2c_2 e^{\frac{2}{x}}$$

$$\xrightarrow{y_1 \to y} y(x) = \pm\sqrt{c_1 e^{1/x} - 2c_2 e^{2/x}}$$, исто за z.

Примена Пикара на системе

① Доказати да Кошијев проблем $\begin{matrix} y_1' = y_1 + y_2^2 \\ y_2' = y_1^2 \end{matrix}$, $y_1(1) = y_2(1) = 2$ има јединствено решење.

Пикар: $Y' = F(x, Y)$, $Y(x_0) = Y_0$ има јед. реш. ако

1) F непрекидна

2) F је локално Липшицова у Y_0 (униформно по x)

$\exists\, U \ni Y_0$ околина од Y_0 и $\exists\, L > 0$ тд. $\|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\| \leq L \cdot \|Y_1 - Y_2\|$, $\forall Y_1, Y_2 \in U$

($\forall x \in I$, I-неки интервал $x_0 \in I$)

(тј. $\exists\, \delta > 0$, $U = B(Y_0; \delta)$)

није битно која је норма, ми ћемо узимати $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ еуклидску.

1) $F(x, y) = (x + y^2, x^2) = \begin{bmatrix} x + y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}$

$x + y^2, x^2$ полиноми $\to F$ непрекидна по компонентама

2) узмемо $\delta = 1$, $U = B((2,2); 1)$

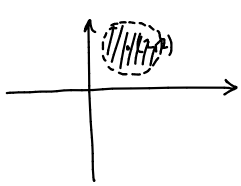
$L = ?$

$$\|F(Y_1) - F(Y_2)\| \leq L \cdot \|Y_1 - Y_2\|$$

$Y_1 = (x_1, y_1) \in U$

$Y_2 = (x_2, y_2) \in U$

$1 \leq x_1, x_2, y_1, y_2 \leq 3$



$$\|(x_1 + y_1^2, x_1^2) - (x_2 + y_2^2, x_2^2)\| \leq L \cdot \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

$$\sqrt{(x_1 + y_1^2 - x_2 - y_2^2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2} \leq L \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad /^2$$

$$((x_1 - x_2) + (y_1^2 - y_2^2))^2 + (x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2)^2 \leq L^2 \cdot ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$$

$$(x_1 - x_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1^2 - y_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)^2 + (x_1 - x_2)^2 (x_1 + x_2)^2 \leq L^2 \cdot ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$$

$$\underbrace{(x_1 - x_2)^2 (1 + (x_1 + x_2)^2)}_{\text{I}} + \underbrace{2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}_{\text{II}} + \underbrace{(y_1 - y_2)^2 \cdot (y_1 + y_2)^2}_{\text{III}} \leq L^2 \cdot \underbrace{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}_{\text{N}}$$

$$\mathrm{I}:\quad \left.\begin{array}{l}(x_1-x_2)^2 \le N\\ 1+(x_1+x_2)^2 \le 1+(3+3)^2=37\end{array}\right\}\ \mathrm{I} \le 37N$$

$$\mathrm{III}:\quad \left.\begin{array}{l}(y_1-y_2)^2 \le N\\ (y_1+y_2)^2 \le (3+3)^2=36\end{array}\right\}\ \mathrm{III} \le 36N$$

$(a^2+b^2 \ge 2|ab| \ge 2ab)$

$$\mathrm{II}:\quad \left.\begin{array}{l}(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \ge 2\cdot(x_1-x_2)(y_1-y_2)\\ y_1+y_2 \le 3+3=6\end{array}\right\}\ \mathrm{II} \le 6N$$

$$L^2=37+36+6=79,\quad L=\sqrt{79}$$

$\Rightarrow$ важи Пикар

домаћи: ① Показати да је F (из прошлог зад.) лок. Лип. у свакој тачки из $\mathbb{R}^2$ (а не само $(2,2)$).

② $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt[4]{x^2+y^2}\right)$. Док. да f није лок. Лип. у $(0,0)$.

Тј. не важи Пикар за $Y'=f(Y)$, $Y(x_0)=(0,0)$.

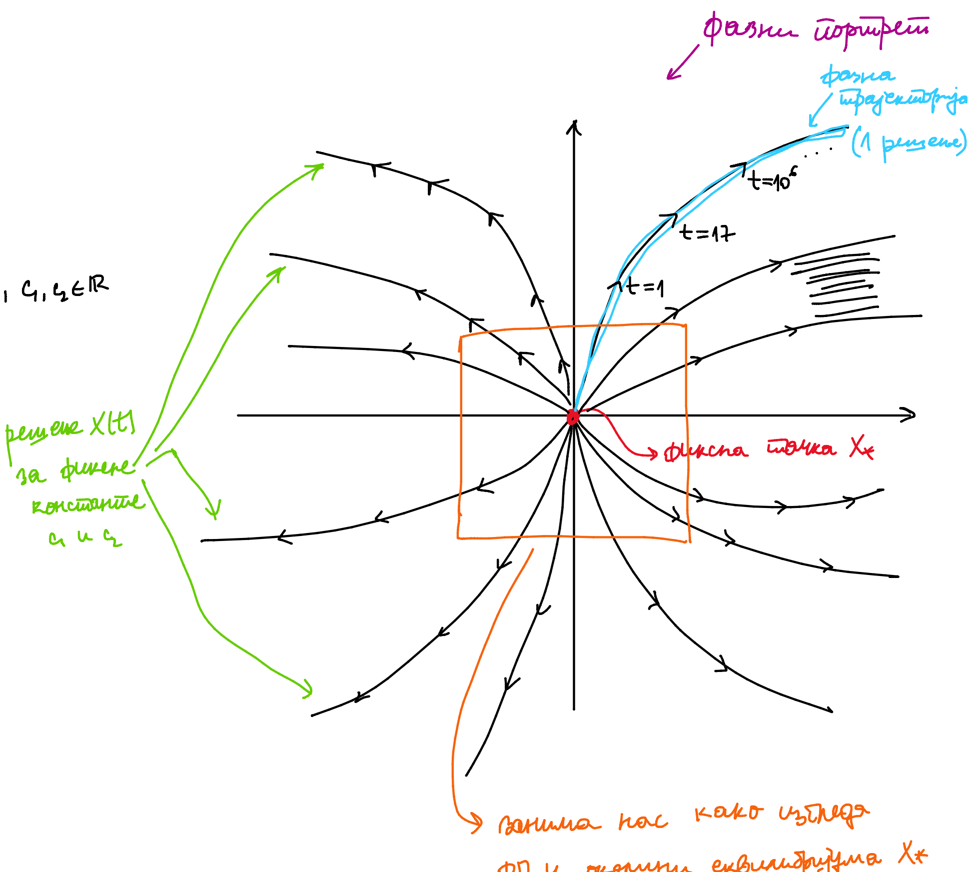
Фазни портрети линеарних динамичких система у 2Д.

$Y(x)$ - функција $\rightsquigarrow$ $X(t)$ $\quad$ X-положај, t-време

$X'=AX$, решење: $X(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$A\in M_2(\mathbb{R})$ $\quad = \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$

↳ параметарска крива у $\mathbb{R}^2$ (за фикс. c_1, c_2)



X_* фиксна тачка = еквилибријум $\quad X'=0$

$$X'=F(X),\quad F(X_*)=0$$

ИСДЈКК: $AX_* = 0 \Rightarrow$ реш. је векторски потпростор од $\mathbb{R}^2$: – тачка $(0,0)$ $(\dim = 0)$

$A \in M_2(\mathbb{R})$ – права кроз $(0,0)$ $(\dim = 1)$

– цела раван $(\dim = 2)$

https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html

1. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

(1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; (2) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (3) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$

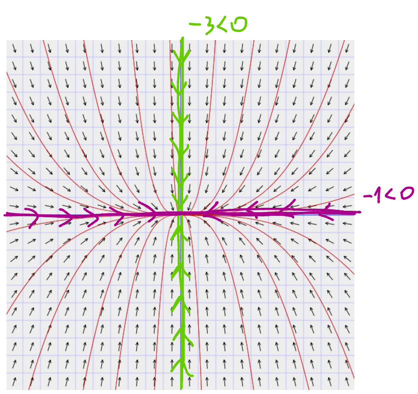
$\left.\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= -3x_2 \end{aligned}\right\}$ $\quad x_1' = x_2' = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}\ x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow X^* = (0,0).$

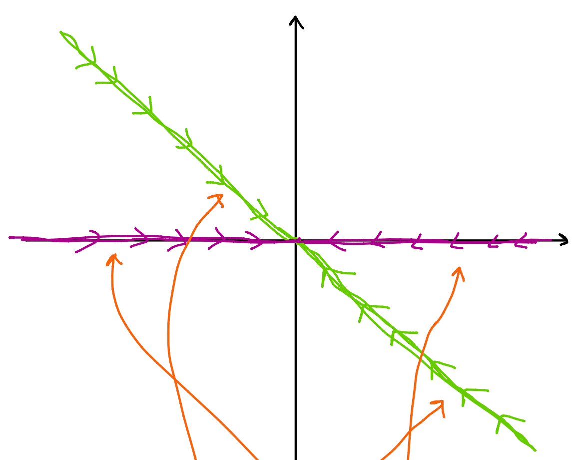
$\lambda_1 = -1,\quad (A+E)\gamma_1 = 0 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = -3,\quad (A+3E)\gamma_2 = 0 \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$X(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

λ_1, λ_2 негативне (реалне) и различите $\rightarrow$ стабилан чвор

$J = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -3 \end{bmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$





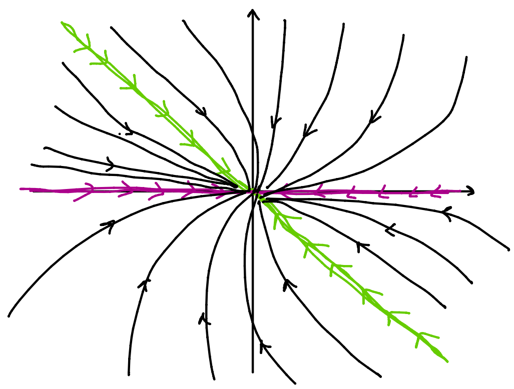
$c_1 = 0$, $c_2 = 1$: $\quad X(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix},\quad x_2 = -x_1 < 0$

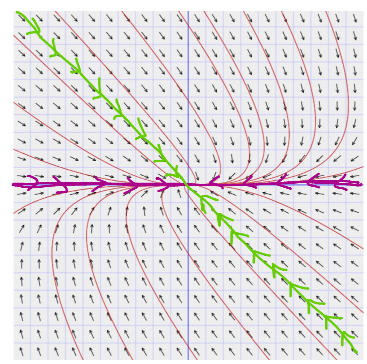
$c_1 = 0$ $\quad X(t) = \begin{bmatrix} -e^{-3t} \\ \ldots \end{bmatrix}$ $\quad x_2 = -x_1 > 0$

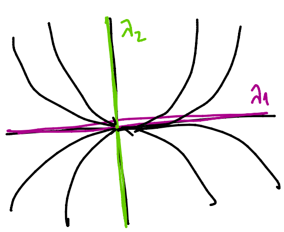
$c_1=0$, $c_2=1$ $\quad X(t)=\begin{bmatrix}-e^{-3t}\\ e^{-3t}\end{bmatrix}$, $\quad x_2=-x_1>0$

$c_1=1$, $c_2=0$ $\quad X(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$, $\quad x_2=0$, $x_1>0$

$c_1=-1$, $c_2=0$ $\quad X(t)=\begin{bmatrix}-e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$, $\quad x_2=0$, $x_1<0$

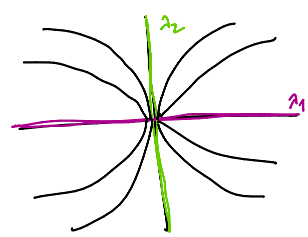






$|\lambda_1|<|\lambda_2|$

v



$|\lambda_2|<|\lambda_1|$

Напомена: $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ нестабилан чвор