5 - понедељак 21.03.2022.

① а) $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$ решити систем

$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$

$y_3' = 2y_1 - y_2$

б) Решити Кошијев проблем $y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

```
>> A=[1 -1 1; 1 1 -1; 2 -1 0]

A =

     1    -1     1
     1     1    -1
     2    -1     0

>> eig(A)

ans =

   -1.0000
    1.0000
    2.0000
```

сопствене вредности матрице A

а) $Y' = AY$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$$

$$(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \gamma_1 \downarrow & \gamma_2 \downarrow & \gamma_3 \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> [T J] = eig(A)

T =

    0.1690   -0.5774    0.7071
   -0.5071   -0.5774    0.0000
   -0.8452   -0.5774    0.7071


J =

   -1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    2.0000
```

T-матрица промене базе са нормираним векторима

$\dot{J}$-дијагонална

$\dot{J} \sim A$

$$A = T \cdot \dot{J} \cdot T^{-1}$$

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = ?$$

```
>> T=[1 1 1; -3 1 0; -5 1 1]

T =

     1     1     1
    -3     1     0
    -5     1     1

>> det(T)

ans =

     6
```

детерминанта матрице

```
>> inv(T)

ans =

    0.1667    0.0000   -0.1667
    0.5000    1.0000   -0.5000
    0.3333   -1.0000    0.6667
```

инверз матрице

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \cdot Adj(T) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = T \cdot \dot{J} \cdot T^{-1}$$

$$A = T \cdot \dot{J} \cdot T^{-1}$$

$$\text{ОР}: \; y(x) = e^{xA} \cdot c = T \cdot e^{x\dot{J}} \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot c}_{c_1} = T \cdot e^{x\dot{J}} \cdot c_1 , \qquad c, c_1 \in \mathbb{R}^3$$

$$x\dot{J} = \begin{bmatrix} -x & & \\ & x & \\ & & 2x \end{bmatrix} \Rightarrow e^{x\dot{J}} = \begin{bmatrix} e^{-x} & & \\ & e^{x} & \\ & & e^{2x} \end{bmatrix}$$

```
>> T*J*inv(T)

ans =

    1.0000   -1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000   -1.0000
    2.0000   -1.0000   -0.0000
```

↳ провера $A = T\dot{J}T^{-1}$

```
>> syms x
>> expm(x*A)

ans =

[     exp(-x)/6 + exp(2*x)/3 + exp(x)/2, exp(x) - exp(2*x),     (2*exp(2*x))/3 - exp(-x)/6 - exp(x)/2]
[                 exp(x)/2 - exp(-x)/2,            exp(x),                      exp(-x)/2 - exp(x)/2]
[ exp(2*x)/3 - (5*exp(-x))/6 + exp(x)/2, exp(x) - exp(2*x), (5*exp(-x))/6 + (2*exp(2*x))/3 - exp(x)/2]
```

↳ експонента матрице

x - симболичка променљива

б) I) $y(x) = Te^{xJ}T^{-1}c$

$$y(0) = Te^{0}T^{-1}c = TET^{-1}c = TT^{-1}c = c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y_k(x) = Te^{x\dot{J}}T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

II) $y(x) = Te^{x\dot{J}} \cdot c_1$

$$y(0) = Te^{0} \cdot c_1 = T \cdot c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_1 = ? \quad \dots$$

② $y' = Ay$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[-3 0 0; 0 3 -2; 0 1 1]

A =

    -3     0     0
     0     3    -2
     0     1     1

>> eig(A)

ans =

   2.0000 + 1.0000i
   2.0000 - 1.0000i
  -3.0000 + 0.0000i
```

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_{2/3} = 2 \pm i$

λ_1 $\qquad \lambda_2 = 2 + i$

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \boxed{-3} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \pm i\beta \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$e^{x\dot{J}} = ?$$

$\begin{bmatrix} B_1 & O \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} B_1^k & O \end{bmatrix} \qquad x\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e^{xB_1} & \end{bmatrix}$

подсетник:

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} B_1^k & 0 \\ 0 & B_2^k \end{bmatrix} \rightsquigarrow e^{x\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{xB_1} & \\ & e^{xB_2} \end{bmatrix}$$

подсетник:

$$e^{x\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}} = e^{\alpha x} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta x) & \sin(\beta x) \\ -\sin(\beta x) & \cos(\beta x) \end{bmatrix} = e^{\alpha x} \cdot R_{\beta x}$$

$$e^{xJ} = \begin{bmatrix} \boxed{e^{-3x}}_{1\times1} & \\ & \boxed{e^{x\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}}_{2\times2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-3x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ 0 & -e^{2x}\sin x & e^{2x}\cos x \end{bmatrix}$$

$T = ?$

$$\lambda_1 = -3 \rightsquigarrow (A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 + i \rightsquigarrow (A - \lambda_2 E)\gamma_2 = 0 \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{Re}\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im}\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \gamma_1\downarrow & \operatorname{Re}\gamma_2\downarrow & \operatorname{Im}\gamma_2\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
>> [T J] = eig(A)

T =

   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i
   0.8165 + 0.0000i   0.8165 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.4082 - 0.4082i   0.4082 + 0.4082i   0.0000 + 0.0000i

J =

   2.0000 + 1.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   2.0000 - 1.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -3.0000 + 0.0000i
```

$\sim\gamma_2$ $\quad$ $\sim\gamma_3 = \overline{\gamma_2}$ $\quad$ γ_1

λ_2 $\quad$ λ_3 $\quad$ λ_1

↳ за комплексне нам eig не даје оно што нам треба

ОР: $y(x) = Te^{xJ} \cdot c \quad , c \in \mathbb{R}^3$

③ $Y' = AY$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[0 -4; 1 4]

A =

     0    -4
     1     4

>> eig(A)

ans =

    2.0000
    2.0000
```

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$k = 2$ - алгебарска вишеструкост

Могућности за J: $\quad J = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$ или $J = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$

↳ 2 Жорданова блока $\qquad$ ↳ 1 Жорданов блок

$(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

број сопствених вектора је 1

$$\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}-2a-4b=0\\ \cancel{a+2b=0}\end{array}\right\} a=-2b$$

$$\gamma_1=\begin{bmatrix}-2b\\ b\end{bmatrix}=b\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\underset{\text{нпр. } b=1}{=}\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

број сопствених вектора је 1

$$\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 E)=\dim \operatorname{Lin}\left\{\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\right\}=1$$

$m=1$ - геометријска вишеструкост

$\Downarrow$

имамо 1 Жорданов блок

$\Downarrow$

$$J=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

```
>> jordan(A)

ans =

     2     1
     0     2
```

↳ Жорданова норм. форма

$$e^{xJ}=?\qquad J=\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{D}+\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{N}$$

N - нилпотентна $(\exists k,\ N^k=0)$

$$DN=ND$$

(2)

$$e^{xJ}=e^{xD+xN}=e^{xD}\cdot e^{xN}=\begin{bmatrix}e^{2x} & 0\\ 0 & e^{2x}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}=e^{2x}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$N^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow e^{xN}=E+\frac{Nx}{1!}+O=E+Nx=\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^k=0,\ \forall k\geq 2$$

$$T=?$$

$T=\left[\gamma_1\downarrow\ \ \gamma_2\downarrow\right]$, γ_2 - није сопствени, али јесте уопштени сопствени век. (генералисани)

$$\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$$

$$(A-\lambda_1 E)\gamma_2=\gamma_1$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}\cancel{-2a-4b=-2}\\ a+2b=1\end{array}\Rightarrow a=1-2b\rightsquigarrow\gamma_2=\begin{bmatrix}1-2b\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

нпр. $b=0$: $\gamma_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow T=\begin{array}{cc}\gamma_1 & \gamma_2\\ \downarrow & \downarrow\end{array}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

```
>> [T J] = jordan(A)

T =

    -2     1
     1     0
```

→ даје уз J и матрицу преласка T

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
T =

   -2    1
    1    0

J =

    2    1
    0    2
```

→ даје уз J и матрицу прелаза T

ОР: $y(x) = T \cdot e^{xJ} \cdot c, \; c \in \mathbb{R}^2$

(4) $y' = Ay$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$$k = 4$$

Могућности за J:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{2} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{2} \end{bmatrix}}_{\text{4 блока}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{2} \end{bmatrix}}_{\text{3 бл.}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}}_{\text{2 бл.}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{bmatrix}}_{\text{2 бл.}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}}_{\text{1 бл.}}$$

$(A - 2E)\gamma = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\cancel{0 = 0}$

$c = 0 \quad \Rightarrow a = c = 0 \quad \Rightarrow \gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\cancel{0 = 0}$

$a = 0$

$$m = \dim \operatorname{Ker}(A - 2E) = \dim \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \middle| b, d \in \mathbb{R} \right\} = 2$$

$\Rightarrow$ 2 Жорданова блока $\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$

μ - минималан полином матрице A

φ - карактеристичан полином матрице A

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (\lambda - 2)^4$$

$\varphi(\lambda)=\det(A-\lambda E)=(\lambda-2)^4$

$\mu \mid \varphi$, $\mu(A)=0$, $st\,\mu$ најмањи могући, μ је моничан

$\mu \mid (\lambda-2)^4 \Rightarrow \mu(\lambda)=(\lambda-2)^k$, $1\le k\le 4$

$k=1$: $\mu(A)=A-2E\neq 0$

$k=2$: $\mu(A)=(A-2E)^2=0 \Rightarrow \mu(\lambda)=(\lambda-2)^2 \Rightarrow st\,\mu=\deg\mu=2$

$\Rightarrow$ највећи ред Жорданових блока је 2

$$\Rightarrow J=\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}$$

$$e^{xJ}=e^{x\begin{bmatrix}B&\\&B\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}e^{xB}&\\&e^{xB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2x}&xe^{2x}&&\\&e^{2x}&&\\&&e^{2x}&xe^{2x}\\&&&e^{2x}\end{bmatrix}$$

$B=\begin{bmatrix}2&1\\&2\end{bmatrix}$, $J=\begin{bmatrix}B&\\&B\end{bmatrix}$

$T=?$ сопс. век: $\gamma_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ и $\gamma_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

сваки има свој Жорданов блок

$$J=\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}2&1\\&2\end{matrix}}&\\&\boxed{\begin{matrix}2&1\\&2\end{matrix}}\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3&\gamma_4\end{bmatrix}$$

(може и редослед: $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_1, \gamma_2$)

γ_2 - уопштени за γ_1:

$(A-2E)\gamma_2=\gamma_1$

$\vdots$

$\gamma_2=\begin{bmatrix}0\\b\\1\\d\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{нпр. } b=d=0} \gamma_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

γ_4 - уопштени за γ_3:

$(A-2E)\gamma_4=\gamma_3$

$\vdots$

$\gamma_4=\begin{bmatrix}1\\b\\0\\d\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{нпр. } b=d=0} \gamma_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (мора бити инвертибилна, $\det T \neq 0$)

ОР: $y(x) = T \cdot e^{xJ} \cdot c, \; c \in \mathbb{R}^4$

```
>> A=[2 0 0 0; 0 2 1 0; 0 0 2 0; 1 0 0 2]

A =

     2     0     0     0
     0     2     1     0
     0     0     2     0
     1     0     0     2

>> [T J] = jordan(A)

T =

     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0


J =

     2     1     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     1
     0     0     0     2
```