① Нека је $A=[a_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$ таква да је $a_{ij}\geq 0,\ \forall i\neq j$. Нека је $B=e^A=[b_{ij}]_{i,j=1}^{n}\in M_n(\mathbb{R})$.
Доказати да је $b_{ij}\geq 0,\ \forall i,j$.

$$A=\begin{bmatrix} ? & & \geq 0 \\ & i=j & \\ \geq 0 & & ? \end{bmatrix} \rightsquigarrow B=\begin{bmatrix} \geq 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & & \geq 0 \\ & 5 & \\ \geq 0 & & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & & \geq 0 \\ & 13 & \\ \geq 0 & & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & & \\ & -8 & \\ & & -8 \end{bmatrix}$$

$$A = A_1 + E_1$$

$$M=\max_{1\leq i\leq n}|a_{ii}|$$

$$E_1=\begin{bmatrix} -M & & & \\ & -M & & \\ & & \ddots & \\ & & & -M \end{bmatrix} = -M\cdot E,\ M\geq 0$$

$$A_1 = A - E_1 = A + ME = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n}$$

$$e^A = e^{A_1+E_1} \overset{②}{=} e^{A_1}\cdot e^{E_1}$$

$$A_1\cdot E_1 = A_1\cdot(-ME) = -M\cdot A_1\cdot E = -MA_1 = -MEA_1 = E_1A_1$$

$$e^{E_1} = e^{\mathrm{diag}[-M\ -M \dots -M]} = \mathrm{diag}[e^{-M}\ e^{-M} \dots e^{-M}]$$

сви су ≥ 0

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ii}+M, & i=j \\ a_{ij}, & i\neq j \end{cases}$$

$a_{ii}+\max_{1\leq j\leq n}|a_{jj}| \geq a_{ii}+|a_{ii}| \geq 0$

$a_{ij}\geq 0$ по поставци

$\Rightarrow A_1$ има све позитивне елем. $\Rightarrow e^{A_1}$ има све позитивне елем.

$$e^{A_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_1^k}{k!}$$

$$e^A = e^{A_1}\cdot e^{E_1} \Rightarrow b_{ij}\geq 0,\ \forall i,j$$

$$e^A = e^{A_1} \cdot e^{E_1} \Rightarrow b_{ij} \geq 0, \forall i,j$$

$$e^{A_1} \geq 0, \quad e^{E_1} \geq 0$$

(2) Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопс. вр. матрице A. Доказати да је e^λ сопс. вр. матрице e^A.

I начин: v - сопс. век за λ

идеја: v је сопс. век и за e^λ (за e^A).

$Av = \lambda v$

треба: $e^A \cdot v = e^\lambda \cdot v$

$$e^A v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k v}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k v}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^\lambda} v = e^\lambda \cdot v$$

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1} \cdot \lambda v = \lambda (A^{k-1} v) = \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda A^{k-2} \lambda v = \lambda^2 A^{k-2} v = \ldots$$

$$\ldots = \lambda^{k-1} A v = \lambda^k v$$

II начин: $\det(A - \lambda E) = 0$ ← знамо

хоћемо: $\det(e^A - e^\lambda E) = 0$

$$\det(e^A - e^\lambda E) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot E\right) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k - \lambda^k E}{k!}\right) =$$

$$\overset{*}{=} \det\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k!}\right) =$$

$$\overset{*}{=} \det\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k - (\lambda E)^k}{k!}\right) =$$

$$\overset{*}{=} \det\left(\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(A - \lambda E)(A^{k-1} + A^{k-2}\lambda + \ldots + A\lambda^{k-2} + \lambda^{k-1} E)}{k!}}_{M_k}\right) =$$

$$= \det\left((A - \lambda E) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} M_k\right) =$$ не знамо да ли конв.

$$= \det\left((A - \lambda E) \cdot \lim_{N \to \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{N} M_k}_{= R_N}\right) =$$

$$\det\left(\lim (A - \lambda E) \cdot R_N\right) =$$

$k=2$

$(A-B)(A+B) =$

$= A^2 + AB - BA - B^2 =$

$= (A^2 - B^2) + (AB - BA)$

(*) $\lambda^k E = \lambda^k E \cdot E^{k-1} =$

$= (\lambda E)^k$

(*) $k=0$:

$$\frac{A^0 - (\lambda E)^0}{0!} = \frac{E - E}{1} = 0$$

(*) $A^k - B^k =$

$= (A-B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + B^{k-1})$

A, B - комутирају

$A \cdot \lambda E = \lambda A E = \lambda A = \lambda E \cdot A$

(*) $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$

$$= \det\left(\lim_{N\to\infty} (A-\lambda E)\cdot R_N\right) =$$

$$\overset{*}{=} \lim_{N\to\infty} \det\left((A-\lambda E)\cdot R_N\right) =$$

$$\overset{*}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\det(A-\lambda E)}_{0}\cdot \det(R_N) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

(*) $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ је непр. фја

$\lim_{N\to\infty} f(x_N) = f(\lim_{N\to\infty} x_N)$

(*) $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

$\boxed{T}$ $y' = Ay$, $A \in M_n(\mathbb{R})$

ОР: $y(x) = e^{xA}\cdot c$, $c \in \mathbb{R}^n$

③ Решити систем ДЈ $y' = Ay$ одредивши e^{xA} у облику степеног реда, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, в) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

а) $$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!}$$?

$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

индукција: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

БАЗА: $k=1$: $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

КОРАК: $A^{k+1} = ?$

$$A^{k+1} = A^k\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k\cdot\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k\cdot k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\cdot k = x\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = x\cdot\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x\cdot e^x$$

$$\text{ОР}: \; y(x) = \begin{bmatrix} e^{x} & xe^{x} \\ 0 & e^{x} \end{bmatrix} \cdot c, \; c \in \mathbb{R}^2$$

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$A^k = ?$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-E) \cdot A = -A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (-E)^2 = E$$

$$\Rightarrow A^k = \begin{cases} A, & 4 \mid k-1 \\ -E, & 4 \mid k-2 \\ -A, & 4 \mid k-3 \\ E, & 4 \mid k \end{cases} = \begin{cases} (-1)^{\ell} \cdot E, & k = 2\ell, \; \ell \in \mathbb{N}_0 \\ (-1)^{\ell} \cdot A, & k = 2\ell+1, \; \ell \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$k = 4t + r, \; r \in \{0,1,2,3\}$

$$A^k = A^{4t+r} = (A^4)^t \cdot A^r = E^t \cdot A^r = A^r$$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell} \cdot A^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell+1} \cdot A^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell} \cdot (-1)^{\ell} \cdot E}{(2\ell)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell+1} \cdot (-1)^{\ell} A}{(2\ell+1)!} =$$

$$= E \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell} x^{2\ell}}{(2\ell)!}}_{= \, 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \dots \, = \, \cos x} + A \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{2\ell+1} \cdot (-1)^{\ell}}{(2\ell+1)!}}_{= \, x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \dots \, = \, \sin x} = E \cdot \cos x + A \cdot \sin x = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

$$\text{ОР}: \; y(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}}_{R_x} \cdot c, \; c \in \mathbb{R}^2$$

(матрица ротације за угао $-x$, само ознака)

в) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}}_{B_1}$, $B_1 = b \cdot E_1$

→ матрица из дела под б

$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$e^{xA} = e^{x \cdot (A_1 + B_1)} = e^{xA_1 + xB_1} = e^{xA_1} \cdot e^{xB_1}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{xA} = e^{x\cdot(\overset{A_1}{A_1}+\overset{B_1}{B_1})} = e^{xA_1 + xB_1} \overset{(2)}{=} e^{xA_1}\cdot e^{xB_1}$$

$$(xA_1)\cdot(xB_1) = x^2\cdot aE\cdot B_1 = x^2 a B_1 = (xB_1)\cdot(x\underbrace{aE}_{A_1}) = (xB_1)\cdot(xA_1)$$

$$e^{xA_1} = e^{\begin{bmatrix} xa & \\ & xa\end{bmatrix}} = e^{\operatorname{diag}[xa \;\; xa]} = \operatorname{diag}\left[e^{xa} \;\; e^{xa}\right] = \begin{bmatrix} e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{ax}\end{bmatrix} = e^{ax}\cdot E$$

$$e^{xB_1} = e^{x\cdot b\cdot E_1} = e^{(xb)\cdot E_1} = R_{xb}$$

$$e^{xE_1} = R_x$$

$$\text{ОР}:\; y(x) = e^{xA}\cdot c = e^{ax}\cdot E\cdot R_{xb}\cdot c = e^{ax}\cdot\begin{bmatrix} \cos(bx) & \sin(bx) \\ -\sin(bx) & \cos(bx)\end{bmatrix}\cdot c\,,\quad c\in\mathbb{R}^2$$

Решавање ЛСДЈКК довести матрицу на Жорданову нормалну форму

$$y' = Ay\,,\quad A\in M_n(\mathbb{R})$$
$\hookrightarrow e^{xA}$

$$A \sim \dot{J}\,,\quad A = T\cdot\dot{J}\cdot T^{-1}$$

$\dot{J}$ – у Жордановој н. форми

T – матрица прелаза

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \boxed{B_1} & & & \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B_k}\end{bmatrix}$$

блокови

↳ блок-дијагонална

B_j су облика:

1) $\lambda\in\mathbb{R}$ сопс. вр. $\quad B_j = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda\end{bmatrix}$

спец: $B_j = [\lambda]$

нпр: $B_j = \begin{bmatrix} [\lambda] & & & \\ & [\lambda] & & \\ & & \begin{bmatrix}\lambda & 1 \\ & \lambda\end{bmatrix} & \\ & & & [\lambda_1]\end{bmatrix}$

2) $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ сопс. вр. $\quad B_j = \begin{bmatrix} \boxed{R} & \boxed{E} & & \\ & \boxed{R} & \ddots & \\ & & \ddots & \boxed{E} \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$, где су $R = \begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}_{2\times 2}$

2) $\alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ собс. вр.

$$B_J = \begin{bmatrix} \boxed{R} & \boxed{E} & & \\ & \boxed{R} & \ddots & \\ & & \ddots & \boxed{E} \\ & & & \boxed{R} \end{bmatrix}, \quad \text{где су} \quad R = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A = T \cdot J \cdot T^{-1}$$

$$\text{ОР}: Y(x) = e^{xA} = e^{x(T\cdot J \cdot T^{-1})} = T \cdot e^{xJ} \cdot T^{-1}$$

(4) из прошлой часа

блокиже найти!