Линеарни системи ДЈ са константним коефицијентима (ЛСДЈКК)

$Y' = AY$ (*), $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\leftarrow$ ЛСДЈКК

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$y(t), y'(t) \in \mathbb{R}^n$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – линеарно независна решења система (*) = фундаментални скуп решења

$\varphi_j' = A\varphi_j$

$\Phi(x) = [\varphi_1(x)\downarrow \ \varphi_2(x)\downarrow \ \dots \ \varphi_n(x)\downarrow]_{n\times n}$ = фундаментална матрица

$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(x) = W(x) = \det \Phi(x)$ = Вронскијан

$W(x) \neq 0 \iff$ лин. нез. реш.

$\Phi(x)$ фундаментална $\iff$ $\Phi'(x) = A \cdot \Phi(x) \ \land \ W(x) \neq 0$

ОР: $y(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

$= \Phi(x) \cdot c$, $c \in \mathbb{R}^n$

Ојлерова метода

идеја: λ – сопс. вр. од A ($Av = \lambda v$, $v \neq 0$)

v – сопс. век од A

$\varphi(x) = e^{\lambda x} \cdot v$ решење од $Y' = AY$

$$\varphi'(x) = (e^{\lambda x} \cdot v)' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot v = e^{\lambda x} \cdot (\lambda v) = e^{\lambda x} \cdot Av = A \cdot (e^{\lambda x} \cdot v) = A\varphi(x)$$

① (реалне и различите сопс. вр.)

$y_1' = 5y_1 + 4y_2$

$y_2' = 4y_1 + 5y_2$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = I = Id = id$$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $y' = A \cdot y$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

сопс. вредности: $\det(A-\lambda E)=0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right)=0$$

$$(5-\lambda)^2-4^2=0$$

$$(1-\lambda)(9-\lambda)=0 \longrightarrow \lambda_1=1, \quad \lambda_2=9$$

сопс. вектори: $\underline{\lambda_1=1}$

$$(A-\lambda_1 E)\cdot \gamma_1=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4a+4b=0 \Rightarrow b=-a$$
$$\cancel{4a+4b=0}$$

нпр. $a=1$ $\quad \gamma_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\rightsquigarrow \varphi_1(x)=e^x\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2=9}$

$$(A-\lambda_2 E)\gamma_2=0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=0$$

$$-4a+4b=0 \Rightarrow b=a$$
$$\cancel{4a-4b=0}$$

нпр. $a=1$ $\quad \gamma_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\rightsquigarrow \varphi_2(x)=e^{9x}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{bmatrix}$$

- у овом случају су решења уяек независна $(W(x)\neq 0)$

$$\Rightarrow \text{ОР}: \; y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=c_1\begin{bmatrix} e^x \\ -e^x \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1e^x+c_2e^{9x} \\ -c_1e^x+c_2e^{9x} \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{array}{cc} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} e^x & e^{9x} \\ -e^x & e^{9x} \end{bmatrix}} \end{array}}_{\Phi(x)}\cdot\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \; c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

$$y_1(x)=c_1e^x+c_2e^{9x}$$
$$y_2(x)=-c_1e^x+c_2e^{9x}$$

② (комплексне и различите сопс. вр.)

$$y_1'=2y_1+y_2$$
$$y_2'=y_1+3y_2-y_3$$
$$y_3'=-y_1+2y_2+3y_3$$

$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3$

$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3$

$$y' = Ay \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Сопс. вр:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda) + 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1\cdot 2 - (-1)\cdot(3-\lambda)\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot(3-\lambda) - 2\cdot(-1)\cdot(2-\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2) + \underbrace{1 - 3 + \lambda + 4 - 2\lambda}_{2-\lambda} = 0$$

$$(2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 6\lambda + 9 + 1) = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4\cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$$

$$\lambda_1 = 2 \ , \quad \lambda_{2/3} = \frac{6 \pm i\cdot 2}{2} = 3 \pm i \qquad (\lambda_3 = \overline{\lambda_2})$$

Сопс. век: $\underline{\lambda_1 = 2}$

$$(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0$$

$$\dots \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi_1(x) = e^{2x}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ e^{2x} \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_{2/3} = 3 \pm i}$

изаберемо: $\lambda_2 = 3 + i$

$\gamma_2 \in \mathbb{C}^3$

$(A - \lambda_2 E)\gamma_2 = 0$ → само тражимо γ_2

$(A - \lambda_2 E)\gamma_2 = 0$

$(A - \lambda_3 E)\gamma_3 = 0$

$\overline{\lambda_3} = \lambda_2 \Rightarrow \overline{\gamma_3} = \gamma_2$

$-1-i$ $\quad -i \quad -i$

$$\begin{bmatrix} 2-(3+i) & 1 & 0 \\ 1 & 3-(3+i) & -1 \\ -1 & 2 & 3-(3+i) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-1-i)\cdot a + b &= 0 \quad /\cdot i \qquad /(-i) \\ a - ib - c &= 0 \quad + \\ -a + 2b - ic &= 0 \quad + \end{aligned}$$

$$(-1-i)a + b = 0$$

$-i+2$

$$(-i+1+1)a - c = 0 \quad /(-i)$$

$1+2i$

$$(2+2i-1)a - ic = 0$$

$$(-1-i)a+b=0 \longrightarrow b=(1+i)\cdot a$$
$$(2-i)a-c=0 \longrightarrow c=a(2-i)$$
$$(-1-2i+1+2i)a=0 \longrightarrow 0\cdot a=0 \rightsquigarrow a\in\mathbb{C} \qquad \rightsquigarrow \begin{bmatrix} a \\ (1+i)a \\ (2-i)a \end{bmatrix}$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$$
$a=1$

$$\Psi(x)=e^{\lambda_2 x}\cdot\gamma_2 = e^{(3+i)x}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix} = e^{3x}\cdot(\cos x + i\sin x)\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ 2-i \end{bmatrix}$$

комплексно решење ДЈ

$$\varphi_2(x)=\mathrm{Re}(\Psi(x))=\begin{bmatrix} e^{3x}\cos x \\ e^{3x}\cos x - e^{3x}\sin x \\ 2e^{3x}\cos x + e^{3x}\sin x \end{bmatrix} \qquad \varphi_3(x)=\mathrm{Im}(\Psi(x))=\begin{bmatrix} e^{3x}\sin x \\ e^{3x}\cos x + e^{3x}\sin x \\ -e^{3x}\cos x + 2e^{3x}\sin x \end{bmatrix}$$

ОР: $y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+c_3\varphi_3(x), \quad c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

И овде је увек $W(x)\neq 0$ (кад год имамо разл. сопс. вр. $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

(случај поновљених реалних сопс. вр.)

$\lambda\in\mathbb{R}$ сопс. вр. од A вишеструкости k

$n=\dim A$, $r=\mathrm{rang}(A-\lambda E)$, $m=n-r$ → говори колико лин. нез. решења система $(A-\lambda E)\gamma=0$ имамо

1) $m=k$, имамо k сопс. вектора $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k$: $\varphi_j(x)=e^{\lambda x}\cdot\gamma_j$, $1\le j\le k$

2) $m<k$, решења тражимо у облику $\varphi(x)=\boxed{P_{k-m}[x]}\cdot e^{\lambda x}$

↳ вектор полинома степена (највише) $k-m$

↳ треба наћи k независних решења

3 (случај $m=k$)

$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3$

3 (случај $m=k$)

$$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3$$
$$y_2' = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3$$
$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A-\lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$\underline{\lambda_1 = 0}$ $\quad (A-\lambda_1 E)\gamma_1 = 0$

$$\vdots \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \varphi_1(x) = e^{0\cdot x}\cdot \gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 1}$
$\downarrow$
$k = 2$

$n = \dim A = 3$

$$r = \text{rang}(A-E) = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{matrix} /\cdot(-3) & /\cdot 1 \\ + & \\ & + \end{matrix} = \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$m = n - r = 3 - 1 = 2$, $k = 2 \Rightarrow m = k \rightsquigarrow$ 2 сопс. век.

$$(A - \lambda_2 E)\gamma = 0$$
$$(A - E)\gamma = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \rightsquigarrow a - b - c = 0 \Rightarrow c = a - b \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ a-b \end{bmatrix} = a\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= \gamma_2} + b\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{= \gamma_3}$$

$$\varphi_2(x) = e^{1\cdot x}\gamma_2 = \begin{bmatrix} e^x \\ 0 \\ e^x \end{bmatrix}, \quad \varphi_3(x) = e^{1\cdot x}\cdot\gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \\ -e^x \end{bmatrix}$$

независност: $W(x) = \det([\varphi_1{\downarrow}\ \ \varphi_2{\downarrow}\ \ \varphi_3{\downarrow}]) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 3 & 0 & e^x \\ -1 & e^x & -e^x \end{vmatrix} = -e^{2x} - e^{2x} + 3e^{2x} = e^{2x} \neq 0$

$$\Rightarrow \text{ОР}: \ y(x) = \begin{bmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 3 & 0 & e^x \\ -1 & e^x & -e^x \end{bmatrix}\cdot C, \quad C \in \mathbb{R}^3$$

④ (случај $m<k$)

$$y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3$$
$$y_2' = 2y_1 - y_2 - 2y_3$$
$$y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3$$

$$\rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

$k=3$

$n=3$

$$r = \operatorname{rang}(A-E) = \operatorname{rang}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1$$

$$m = n - r = 3-1 = 2 < 3 = k$$

решења тражимо у облику:

$$\varphi(x) = e^x \cdot P_{k-m}[x] = e^x \cdot P_1[x] = e^x \cdot \begin{bmatrix} a_1x+b_1 \\ a_2x+b_2 \\ a_3x+b_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{задовољава } \varphi' = A\varphi$$

$$\cancel{e^x} \cdot \begin{bmatrix} a_1x + a_1 + b_1 \\ a_2x + a_2 + b_2 \\ a_3x + a_3 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{e^x} \cdot \begin{bmatrix} a_1x+b_1 \\ a_2x+b_2 \\ a_3x+b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_1x + a_1 + b_1 &= (2a_1 - a_2 - a_3)x + (2b_1 - b_2 - b_3) \\ a_2x + a_2 + b_2 &= (2a_1 - a_2 - 2a_3)x + (2b_1 - b_2 - 2b_3) \\ a_3x + a_3 + b_3 &= (-a_1 + a_2 + 2a_3)x + (-b_1 + b_2 + 2b_3) \end{aligned} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 - a_3 &= 0 \quad \cdot(-2),\ \cdot(-1) \\ \cancel{2a_1 - 2a_2 - 2a_3 = 0} \\ \cancel{-a_1 + a_2 + a_3 = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 - b_3 &= a_1 \quad \cdot 2,\ \cdot(-1) \\ 2b_1 - 2b_2 - 2b_3 &= a_2 \\ -b_1 + b_2 + b_3 &= a_3 \end{aligned}$$

$$\cancel{a_1 - a_2 - a_3 = 0}$$

$$2a_1 = a_2$$
$$-a_1 = a_3$$

$$a_2 = 2a_1$$
$$a_3 = -a_1$$
$$b_1 - b_2 - b_3 = a_1$$

$\}\ a_1, b_2, b_3$ – параметри

$$a_2 = 2a_1 \qquad b_1 - b_2 - b_3 = a_1$$

$$a_3 = -a_1 \qquad b_1 = a_1 + b_2 + b_3$$

$\Big\}$ a_1, b_2, b_3 – параметри

$$\varphi(x) = e^x \cdot \begin{bmatrix} a_1 x + (a_1 + b_2 + b_3) \\ 2a_1 x + b_2 \\ -a_1 x + b_3 \end{bmatrix} = \underbrace{a_1 \cdot e^x \cdot \begin{bmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{bmatrix}}_{\varphi_1(x)} + \underbrace{b_2 \cdot e^x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\varphi_2(x)} + \underbrace{b_3 \cdot e^x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\varphi_3(x)}$$

Независност? $$W(x) = \det\left(\begin{bmatrix} e^x(x+1) & e^x & e^x \\ e^x \cdot 2x & e^x & 0 \\ -e^x \cdot x & 0 & e^x \end{bmatrix}\right) = e^{3x} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = e^{3x} \neq 0$$

ОР: $y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Напомена: Ако имамо $\lambda \in \mathbb{C}$ вишеструко, поступак је сличан (Re, Im део)
↳ као у 3 и 4 НЕЋЕМО РАДИТИ!