12 - понедељак 23.05.2022.

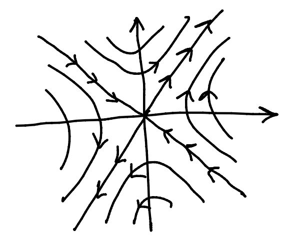
① Скицирати ФП за
$$x' = y$$
$$y' = x - x^3$$

еквилибријуми: $y = 0$, $x - x^3 = 0$ $\Rightarrow$ $X_1^* = (0,0)$, $X_2^* = (-1,0)$, $X_3^* = (1,0)$

$x(1-x)(1+x) = 0$

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} y \\ x - x^3 \end{bmatrix} , \quad dF(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$dF(X_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1}_{\text{(седло)}} \xrightarrow[Re(\lambda_i) \neq 0]{\text{по } T} \text{нелин. сис. је такође седло}$$



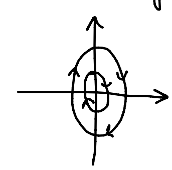
$$dF(X_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(центар)

$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{2}\, i$ $\xrightarrow{\text{не може } T}$ испоставља се да је нелин. сис. такође центар

$Re(\lambda_{1/2}) = 0$

$$dF(X_3^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$



Изоклине: x-нула изоклине $\Rightarrow x' = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow$ x-оса је изоклина , кретање је $\uparrow$ или $\downarrow$

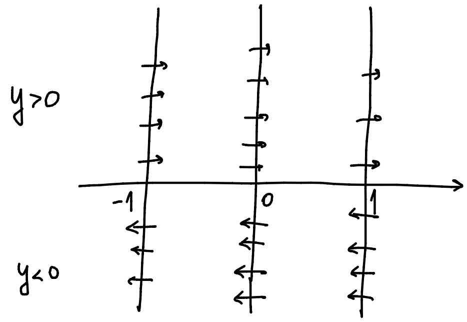
$y' > 0$, $y' < 0$

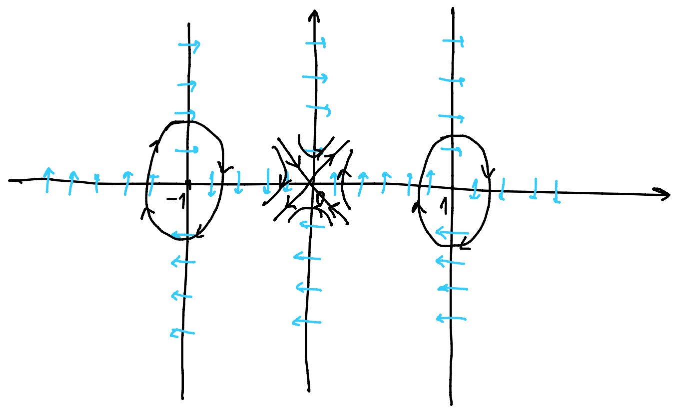
x-оса	$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$	-1 $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$	0 $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$	1 $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow$
$x - x^3$	>0	<0	>0	<0

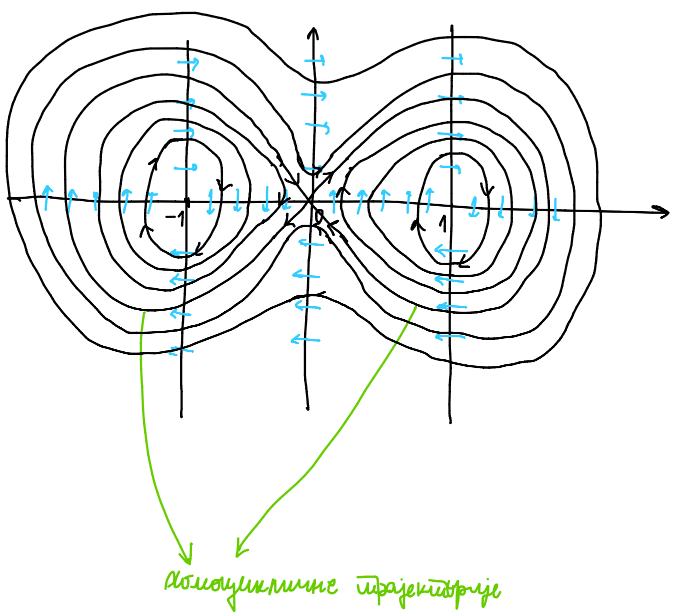
y-нула изоклина $\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x = -1 , x = 0 , x = 1$, кретање $\rightarrow$ или $\leftarrow$

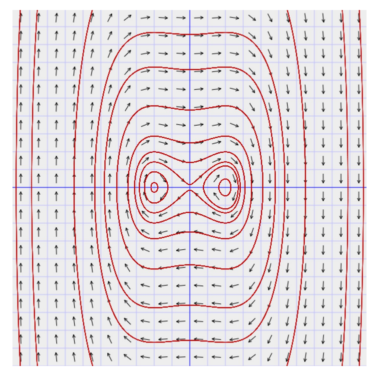
изоклина је унија 3 праве

$x' > 0$, $x' < 0$



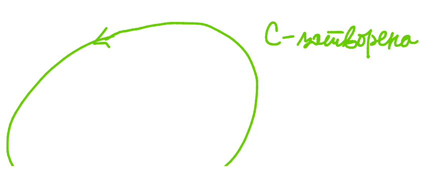


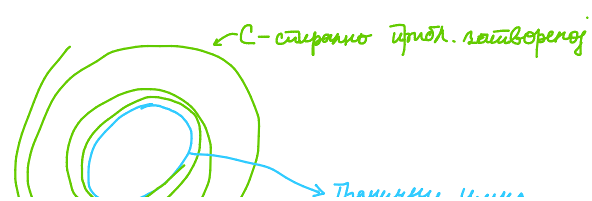


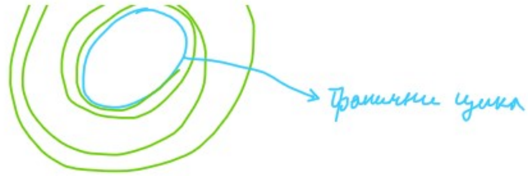


$\boxed{T}$ (Поенкаре - Бендиксон)

Нека је R затворен и ограничен подскуп равни $\mathbb{R}^2$ који не садржи еквилибријуме за $X'=F(X)$, $F\in C^1(E)$, $R\subseteq E$. Нека постоји трајекторија C која је у почетном тренутку t_0 у тачки из R и остаје у R за $t\geq t_0$. Тада је C затворена трајекторија или трајекторија која се спирално приближава затвореној када $t\to+\infty$.







② Испитати егзистенцију граничног циклуса д.с.
$$x' = x - y - x^3$$
$$y' = x + y - y^3$$

идеја: прећи у поларне координате и посматрати појас $1 \le r \le \sqrt{2}$.

$x(t), y(t) \rightsquigarrow r(t), \theta(t)$

$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$$
$$y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$$

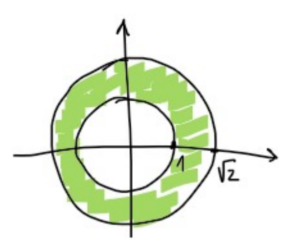
$$\left.\begin{aligned} x' &= r'\cos\theta + r\cdot(-\sin\theta)\cdot\theta' \quad /\cdot\cos\theta \\ y' &= r'\sin\theta + r\cos\theta\cdot\theta' \quad /\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\} + \quad \Rightarrow \quad x'\cos\theta + y'\sin\theta = r'\cos^2\theta + r'\sin^2\theta = r'$$

$$r' = (x-y-x^3)\cos\theta + (x+y-y^3)\sin\theta = (r\cos\theta - r\sin\theta - r^3\cos^3\theta)\cos\theta + (r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin^3\theta)\sin\theta =$$
$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = r - r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

$$r\cos\theta\,\theta' = y' - r'\sin\theta = x + y - y^3 - (r - r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta))\sin\theta =$$
$$= r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin^3\theta - r\sin\theta + r^3\sin\theta(\cos^4\theta + \sin^4\theta) =$$
$$= r\cos\theta + r^3\sin\theta\cos^4\theta - r^3\sin^3\theta(1 - \sin^2\theta) =$$
$$= r\cos\theta + r^3\sin\theta\cos^4\theta - r^3\sin^3\theta\cos^2\theta \quad /: r\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= 1 + r^2\sin\theta\cos^3\theta - r^2\sin^3\theta\cos\theta \\ r' &= r - r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \end{aligned}\right\}$$

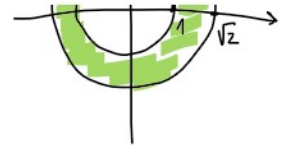
$$R = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le \sqrt{2}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$$



$f(x,y) = x^2 + y^2$, $R = f^{-1}([1,2])$

$[1,2]$ затв. $\Rightarrow$ R затворен

[illegible]



$[1,2]$ затв. $\Rightarrow$ R затворен
f непр.

$R \subseteq B((0,0);2) \Rightarrow R$ ограничен

еквилибријуми: $r=0: (x,y)=(0,0)$ ✓ $\quad r'=0$

$r\neq 0$: $\quad r - r^3(\cos^4\theta+\sin^4\theta)=0 \ /:r \Rightarrow 1=r^2(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$

$$1+r^2\sin\theta\cos^3\theta - r^2\sin^3\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow r^2\sin\theta\cos\theta(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}=\cos^4\theta+\sin^4\theta = \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\frac{\sin 2\theta}{2}}\underbrace{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}_{-\cos 2\theta} = -\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta$$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos^4\theta+\sin^4\theta = (\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$

$\sin^2 2\theta = \frac{1-\cos 4\theta}{2}$

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta = -\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta = -\frac{1}{4}\sin 4\theta$$

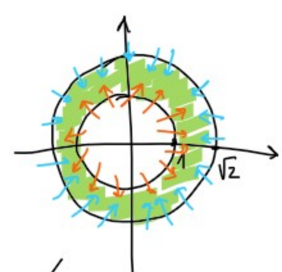
$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\theta = -\frac{1}{4}\sin 4\theta \ /\cdot 4$$

$$\underbrace{\cos 4\theta}_{\in[-1,1]} + \underbrace{\sin 4\theta}_{\in[-1,1]} = -3 \ ↯$$

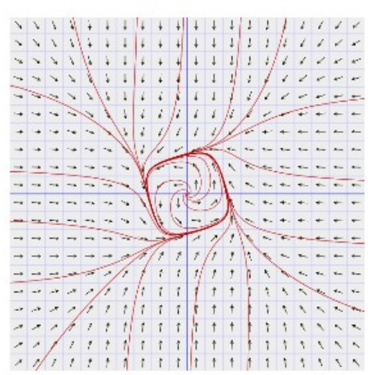
$\Rightarrow$ R нема еквилибријума

$$r=1: \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=1} = 1-(\cos^4\theta+\sin^4\theta) = 1-\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \geq 0$$

$$r=\sqrt{2}: \quad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=\sqrt{2}} = \sqrt{2}-2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin^2 2\theta = \sqrt{2}(\underbrace{\sin^2 2\theta}_{\in[0,1]}-1) \leq 0$$



трајекторија не може да побегне из региона R



$\xRightarrow{П-Б}$ у R имамо гранични циклус

претпос. из прошлог зад. није пр.пов. области

Дулакова теорема: Нека је $x'=F(x)$, $F=(f,g)\in C^1(E)$, $E\subseteq\mathbb{R}^2$ и ... [illegible]

Претход из прошлог зад. није пр. пов. области

Дулаков критеријум: Нека је $X'=F(X)$, $F=(f,g)\in C^1(E)$, $E\subseteq\mathbb{R}^2$ је просто повезана (без рупа). Ако постоји $v\in C^1(E)$ т.д. $\operatorname{div}(v\cdot F)=\frac{\partial}{\partial x}(v\cdot f)+\frac{\partial}{\partial y}(v\cdot g)$ не мења знак на E, онда $X'=F(X)$ нема затворених трајекторија у E.

③ Доказати да дс. немају затворених трајекторија:

а) $x'=x^2y^2+1$, $y'=xy^3+x$

б) $x'=y^2$, $y'=x$

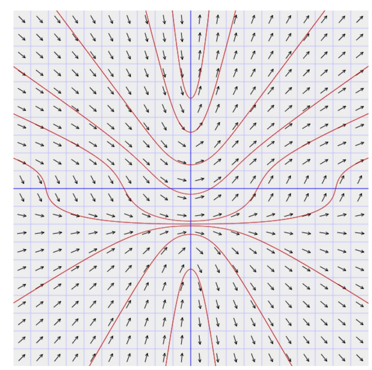
узимамо $E=\mathbb{R}^2$ (пр. пов.)

а) $v=?$

$$T=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\cdot(x^2y^2+1)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\cdot(xy^3+x)\right)\neq 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\underbrace{(x^2y^2+1)}_{>0}+\underbrace{v\cdot(2xy^2)+v\cdot(3xy^2)}_{v\cdot 5xy^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\underbrace{(xy^3+x)}_{?}\neq 0$$

ово пробамо да склонимо



$v(x,y)=v(x)$

$v'(x)\cdot(x^2y^2+1)+v\cdot 5xy^2>0$?

довољно $v'\geq 0$, $v\cdot x\geq 0$

$v(x,y)=x\in C^1(\mathbb{R}^2)$

$$T=1\cdot(x^2y^2+1)+x\cdot(5xy^2)=x^2y^2+1+5x^2y^2=6x^2y^2+1>0 \overset{ДК}{\Longrightarrow} \text{нема затв. трај.}$$

Пробати: $v\equiv 1$

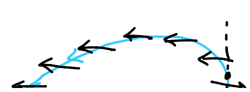
$v(x,y)=v_1(x)+v_2(y)$

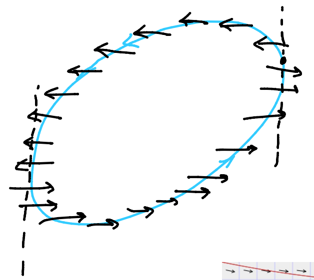
$v(x,y)=v_1(x)\cdot v_2(y)$

б) $F(x,y)=\begin{bmatrix} y^2 \\ x \end{bmatrix}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2\cdot v)+\frac{\partial}{\partial y}(x\cdot v)=y^2\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\neq 0$$

↳ можда може, тешко



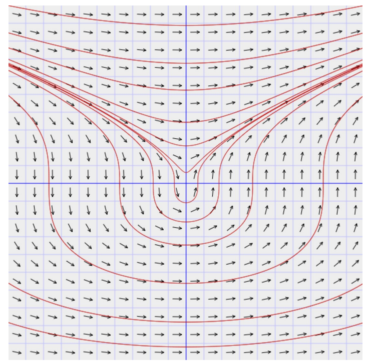


↳ можда може, тешко

x' мора да мења знак (идемо → па ←)

јер иначе $x' \geq 0$, а онда трајекторија није затворена

$$x' = y^2 \geq 0 \quad ↯$$
$$y' = x$$



⊛ Гранични проблем и Гринова функција → погледати предавања