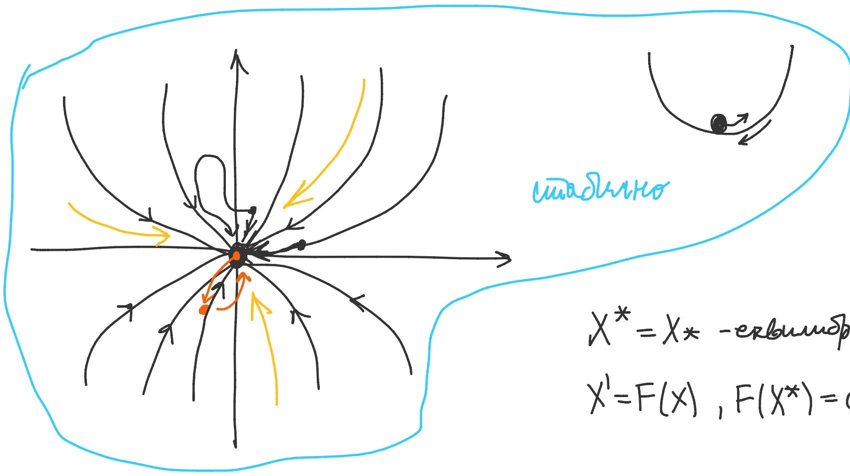
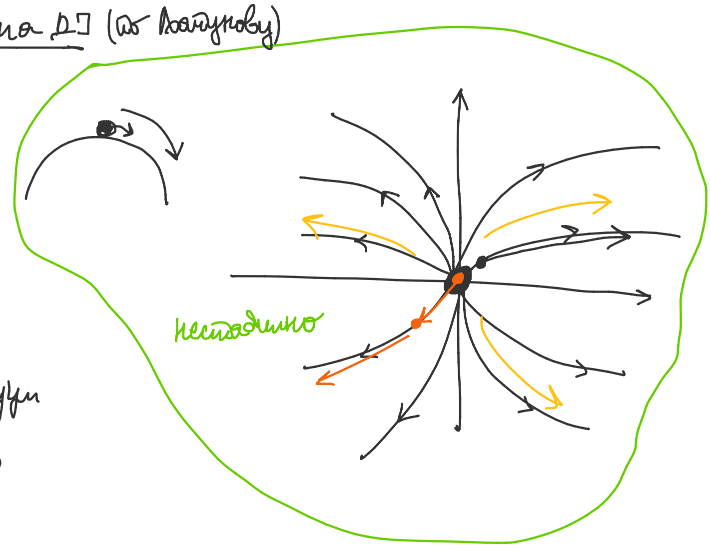
Стабилност еквилибријума ДЈ (по Љапунову)





$X^* = X_*$ - еквилибријум

$X' = F(X)$, $F(X^*) = 0$

Деф. Еквилибријум X^* је:

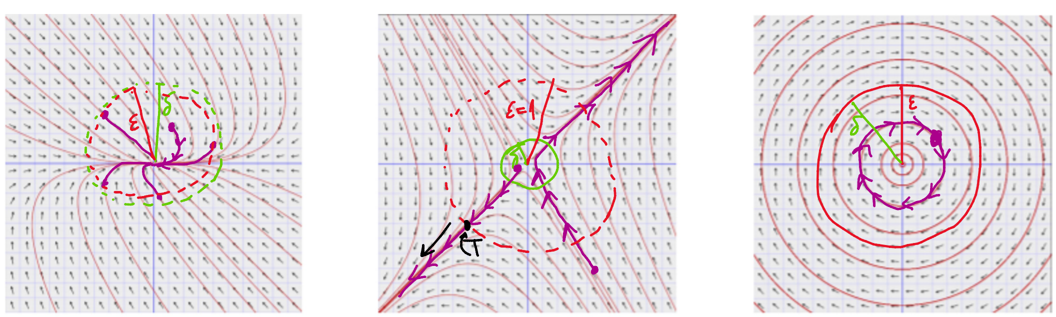
1) стабилан, ако $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall X(t)$ решење, $X(t_0) = X_0)$ $\|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \|X(t) - X^*\| < \varepsilon$, $\forall t \geq T$

2) нестабилан, ако није стабилан

3) асимптотски стабилан, ако је стабилан и $(\exists \delta > 0)\ \|X_0 - X^*\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} X(t) = X^*$.

1. Скицирати фазне портрете динамичких система, а затим испитати стабилност њихових еквилибријума:

а) $x_1' = -x_1 + 2x_2$, $x_2' = -3x_2$ б) $x_1' = -x_1 + 3x_2$, $x_2' = 5x_1 - 3x_2$ в) $x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1$.



стабилан чвор — седло — центар

а) ε-дато

$\delta = \varepsilon$ $\qquad X_0 \in B((0,0);\delta) \Rightarrow X(t) \in B((0,0);\varepsilon)$, $\forall t \geq t_0$ ✓

стабилан, да ли је асимптотски? (АС) ✓ $\lim\limits_{t \to \infty} X(t) = X^*$

б) нестабилан $\Leftrightarrow$ $\neg$ стабилан

$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists X(t)$ решење, $X(t_0)=X_0)$ $\|X_0-X^*\|<\delta \wedge \|X(t)-X^*\|\geq\varepsilon$, за неко $t\geq T$

$\varepsilon=1$ $\quad \|X(t_0)\|<\delta$ (лева лудинаста)

нестабилан

$\exists T\geq 0,\ \forall t\geq T,\ \|X(t)\|\geq 1$

в) $\delta=\varepsilon$

$\|X(t)\|=\|X_0\|,\ \forall t$

$\|X_0\|<\delta \Rightarrow \|X(t)\|<\varepsilon$ ✓

$\Updownarrow$

$\|X_0\|<\delta \Rightarrow \|X_0\|<\delta$ ✓

$\Rightarrow$ стабилан

да ли је AC? није! ппс $\lim\limits_{t\to\infty} X(t)=(0,0) \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \underbrace{\|X(t)\|}_{=\|X_0\|}=\|(0,0)\|=0$

$\Rightarrow \|X_0\|=0 \Rightarrow X_0=(0,0)$ ↯

домаћи: доказати и алгебарски (решити систем)

$\boxed{T}$ (Прва Т Љапунова, метод сопс. вр.)

$X'=F(X)$, $A=dF(X^*)$

1) Свака сопс. вр. λ од A има $Re(\lambda)<0 \Rightarrow X^*$ асимптотски стабилан

2) Ако $\exists\lambda$ сопс. вр. од A тд. $Re(\lambda)>0 \Rightarrow X^*$ нестабилан

$X'=F(X) \rightsquigarrow X'=AX$, $A=dF(\underline{\underline{X^*}})$

$F=(F_1,\dots,F_n)$

$X=(x_1,\dots,x_n)$

$$dF(X^*)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*) \end{bmatrix}$$

2. Испитати стабилност еквилибријума из задатка 1 помоћу теореме Љапунова о сопственим вредностима.

$X'=AX=F(X)$

$F(X)=A\cdot X \Rightarrow dF(X)=A \Rightarrow dF(X^*)=A$

а) $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1=-1, \lambda_2=-3$, $Re(\lambda_1)=-1<0$, $Re(\lambda_2)=-3<0 \Rightarrow X^*$ је AC б) $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 5 & -3\end{bmatrix}$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-6$, $Re(\lambda_1)=2>0$, $Re(\lambda_2)=-6<0$ $\Rightarrow$ X^* је нестабилан

в) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $\lambda_{1/2}=\pm i$, $Re(\lambda_{1/2})=0$ $\Rightarrow$ из Т не можемо закључити

3. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned} x_1' &= e^{x_1} - e^{-3x_3} \\ x_2' &= 4x_3 - 3\sin(x_1+x_2) \\ x_3' &= \ln(1-3x_1+x_3), \end{aligned}$$

а затим испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0,0)$.

$$F(x_1,x_2,x_3) = (\underbrace{e^{x_1}-e^{-3x_3}}_{F_1},\ \underbrace{4x_3-3\sin(x_1+x_2)}_{F_2},\ \underbrace{\ln(1-3x_1+x_3)}_{F_3})$$

$F=0 \Rightarrow F_1=F_2=F_3=0$

$e^{x_1}-e^{-3x_3}=0 \rightsquigarrow e^{x_1}=e^{-3x_3} \rightsquigarrow x_1=-3x_3$

$4x_3-3\sin(x_1+x_2)=0$

$\ln(1-3x_1+x_3)=0 \rightsquigarrow 1-3x_1+x_3=1 \rightsquigarrow x_3=3x_1=3\cdot(-3x_3)=-9x_3 \Rightarrow x_3=0$

$x_1=0$

$4\cdot 0-3\sin(0+x_2)=0 \longrightarrow \sin(x_2)=0 \rightsquigarrow x_2=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$$X^*\in\{(0,k\pi,0)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

$X^*=(0,0,0)$:

$A=dF(X^*)$

$$dF(X)=\begin{bmatrix} e^{x_1} & 0 & 3e^{-3x_3}\\ -3\cos(x_1+x_2) & -3\cos(x_1+x_2) & 4\\ \dfrac{-3}{1-3x_1+x_3} & 0 & \dfrac{1}{1-3x_1+x_3}\end{bmatrix}$$

$$A=dF(0,0,0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -3 & -3 & 4\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=-3,\ \lambda_{2/3}=1\pm 3i$$

$$\left.\begin{aligned} Re(\lambda_1)&=-3<0\\ Re(\lambda_{2/3})&=1>0\end{aligned}\right\} \Rightarrow X^* \text{ је нестабилан}$$

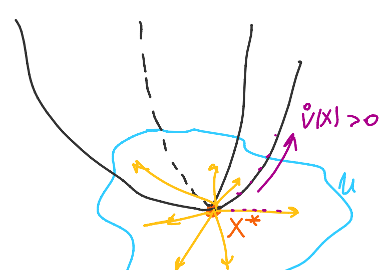
$\boxed{\text{Т}}$ Нека је X^* еквилибријум система $X'=F(X)$. У некој околини $\mathcal{U}\ni X^*$ постоји ф-ја $V:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ тд.

1) $V\in C^1(\mathcal{U})$

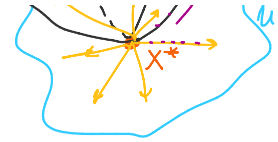
2) $V(X^*)=0$ и $V(X)>0$, $\forall X\in\mathcal{U}\setminus\{X^*\}$ (позитивно дефинитна)

3) Важи једна од следећих ствари:

- $\mathring{V}(X)\le 0$, $\forall X\in\mathcal{U}\setminus\{X^*\}$ $\Rightarrow$ X^* стабилан
- $\mathring{V}(X)<0$, $\forall X\in\mathcal{U}\setminus\{X^*\}$ $\Rightarrow$ X^* АС



- $\overset{\circ}{V}(X) < 0$, $\forall X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ AC
- $\overset{\circ}{V}(X) > 0$, $\forall X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\} \Rightarrow X^*$ нестабилан



$\overset{\circ}{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = \nabla V(X) \circ F(X) \to$ извод V дуж трајекторије

често: $V(X) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$
$a_1, \dots, a_n > 0$

V-функција Љапунова

4. Одредити све еквилибријуме динамичког система

$$\begin{aligned} x_1' &= (x_3+1)(2x_2 - x_1) \\ x_2' &= -(x_3+1)(x_1+x_2) \\ x_3' &= -x_3^3, \end{aligned}$$

а затим испитати њихову стабилност.

$$\left.\begin{aligned} (x_3+1)(2x_2-x_1) &= 0 \\ -(x_3+1)(x_1+x_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x_2 - x_1 &= 0 \\ -x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = x_2 = 0$$

$$-x_3^3 = 0 \to x_3 = 0$$

$$X^* = (0,0,0)$$

домаћи: методом сопс. вр. не добијамо одговор

$V(x_1, x_2, x_3) = a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2$, $a, b, c > 0$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ✓

$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = (2a x_1, 2b x_2, 2c x_3)$

2) $V(0,0,0) = 0$, $V(X) > 0$, $X \neq X^*$

3) $\overset{\circ}{V}(X) = \langle \nabla V(X), F(X) \rangle = 2a x_1 \cdot (x_3+1)(2x_2 - x_1) + 2b x_2 \cdot (x_3+1)(-x_1 - x_2) + 2c x_3 \cdot (-x_3^3) =$

$$= \underbrace{(x_3+1)}_{>0}\big(4a x_1 x_2 \underbrace{- 2a x_1^2}_{\le 0} - 2b x_1 x_2 \underbrace{- 2b x_2^2}_{\le 0}\big) \underbrace{- 2c x_3^4}_{\le 0}$$

хоћемо околину од $(0,0,0)$. $\mathcal{U} = \{\|x\| < \frac{1}{2}\}$
и ту је $x_3 + 1 > 0$

хоћемо да је ово $= 0$
$4a = 2b$

нпр. $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$:

$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$

$\overset{\circ}{V}(x_1, x_2, x_3) = (x_3+1)(-2x_1^2 - 4x_2^2) - 2x_3^4 \le 0$ за $X \in \mathcal{U} \setminus \{X^*\}$

$X \neq X^*$: $\overset{\circ}{V} < 0 \Rightarrow X^*$ је AC

5. Доказати да је координатни почетак стабилан, али не и асимптотски стабилан еквилибријум система
1) $X' = AX$, где је $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Испитати стабилност еквилибријума $X^* = (0,0)$ система:

2) а) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ б) $X' = AX + \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix}$ в) $X' = AX + \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix}$

3) Показати да је у сва три случаја матрица $dF(\mathbf{0})$ једнака и да метод сопствених вредности не даје одговор.

дом*ави: 1) погледати 1в

3) добије се $dF(0)=A$ у сва три случаја, погледати 2в

а) $X' = \begin{bmatrix} -x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2 \\ x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \leftarrow F(X)$

$V(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$, $a,b>0$ $\qquad \nabla V = (2ax_1, 2bx_2)$

1) $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$

2) $V(X^*)=0$, $V(X)>0$, $X \neq X^*$

3) $\overset{\circ}{V}(X) = 2ax_1 \cdot (-x_2 - x_1^3 - x_1x_2^2) + 2bx_2 \cdot (x_1 - x_2^3 - x_1^2x_2) = \ldots = \underbrace{-2ax_1^4}_{\leq 0} \underbrace{-2bx_2^4}_{\leq 0} \underbrace{-2(a+b)x_1^2x_2^2}_{\leq 0} + \underbrace{x_1x_2(2b-2a)}_{?}$

$2b = 2a$

нпр. $a=b=1$

$V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\overset{\circ}{V}(x_1,x_2) = -2x_1^4 - 2x_2^4 - 4x_1^2x_2^2 = -2(x_1^2+x_2^2)^2 < 0$, $\forall X \neq X^* \Rightarrow X^*$ је АС

б) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\overset{\circ}{V}(X) = \ldots = 2(x_1^2+x_2^2)^2 > 0$, $\forall X \neq X^* \Rightarrow X^*$ је нестабилан

в) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\overset{\circ}{V}(X) = \ldots = 0 \Rightarrow X^*$ је стабилан