4. Скицирати фазни портрет динамичког система $X' = AX$, ако је:

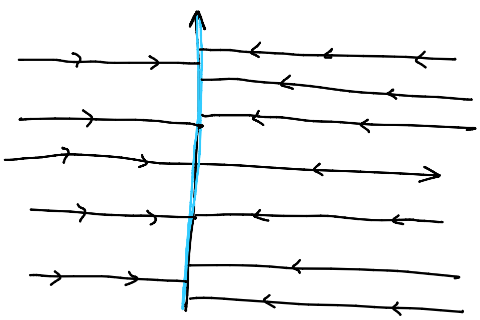
(1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (2) $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; (3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) $x_1' = -5x_1$
$x_2' = 0$

$\left.\begin{matrix} -5x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{matrix}$

$X^* = \{(0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

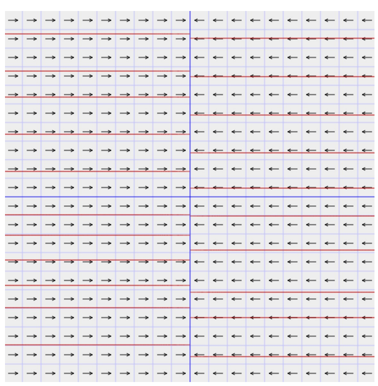
неизоловани еквилибријуми



$x_1' = -5x_1$
$x_2' = 0$

$x_1 = c_1 e^{-5t}$
$x_2 = c_2$, $X(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-5t} \\ c_2 \end{bmatrix}$

↳ увек на истој висини



1) $c_1 > 0$: $x_1 = c_1 e^{-5t} \searrow$ иду налево
$x_1 > 0$

$t \to -\infty$: $x_1 \to +\infty$
$t \to +\infty$: $x_1 \to 0+$

2) $c_1 < 0$: $x_1 = c_1 e^{-5t} \nearrow$ иду надесно
$x_1 < 0$

$t \to -\infty$: $x_1 \to -\infty$
$t \to +\infty$: $x_1 \to 0-$

2. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и нека је $a \neq \pm b$. Свести диференцијалну једначину $y'' + 2ay' + b^2 y = 0$ на систем диференцијалних једначина. У зависности од параметара a и b испитати тип еквилибријума и скицирати фазне портрете.

↳ за вежбу (узмите по 1 пар параметара у сваком од случајева)

$y'' + 2ay' + b^2 y = 0$

$\left.\begin{matrix} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = -2ay' - b^2 y = -2a x_2 - b^2 x_1 \end{matrix}$

$X' = AX$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b^2 & -2a \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = 0$

$(-\lambda)(-2a - \lambda) + b^2 = 0$

$\lambda^2 + 2a\lambda + b^2 = 0$

$D = (2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot b^2 = 4(a^2 - b^2) \neq 0$

$1^\circ \quad D>0, \; a^2-b^2>0, \quad \lambda_{1/2} = \frac{-2a \pm \sqrt{D}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-b^2}$

$2^\circ \quad D<0, \; a^2-b^2<0, \quad \lambda_{1/2} = \frac{-2a \pm i\sqrt{-D}}{2} = -a \pm i\sqrt{b^2-a^2}$

$X^* = ?$ $\qquad AX=0 \qquad \left.\begin{array}{l} x_2=0 \\ -b^2x_1-2ax_2=0 \end{array}\right\} \; b^2x_1=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \; b=0: \; X^*\in\{(s,0) \mid s\in\mathbb{R}\} \\ \searrow \; x_1=0: \; X^*=(0,0) \end{array}$

$1^\circ \quad a^2-b^2>0 \quad (a\neq 0)$

$1.1^\circ \quad b=0, \; a^2>0, \; X^*\in\{(s,0) \mid s\in\mathbb{R}\}$ неизоловани еквилибријуми

$X^*=(0,0)$ $\quad 1.2^\circ \quad b\neq 0$

$\lambda_1 = -a+\sqrt{a^2-b^2}$

$\lambda_2 = -a-\sqrt{a^2-b^2} \qquad \Rightarrow \lambda_1>\lambda_2 \quad (\lambda_1\neq\lambda_2)$

$1.2.1^\circ \quad a>0: \quad \lambda_2<0$ увек

$\lambda_1<0 \iff -a+\sqrt{a^2-b^2}<0 \iff \sqrt{a^2-b^2}<a \;/^2$ (обе стране >0)

$\iff a^2-b^2<a^2$

$\iff -b^2<0$ (T)

$0>\lambda_1>\lambda_2$ стабилан чвор

$1.2.2^\circ \quad a<0: \quad \lambda_1>0$ увек

$\lambda_2\leq 0 \iff -a-\sqrt{a^2-b^2}\leq 0 \iff -a\leq\sqrt{a^2-b^2} \;/^2$ (обе стране >0)

$\iff a^2\leq a^2-b^2$

$\iff 0\leq -b^2$ ($\perp$)

$\Rightarrow \lambda_2>0$

$\lambda_1>\lambda_2>0$ нестабилан чвор

$2^\circ \quad a^2-b^2<0$

$\lambda_1 = -a+i\sqrt{b^2-a^2}$

$\lambda_2 = -a-i\sqrt{b^2-a^2} \qquad (\mathrm{Im}(\lambda_{1/2})\neq 0)$

2.1° $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) = 0$, $a = 0$ центар

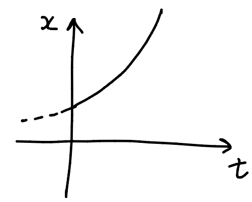
2.2° $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) > 0$, $a < 0$ нестабилна спирала

2.3° $\mathrm{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$, $a > 0$ стабилна спирала

Компетитивне врсте – еколошки модел

x – број јединки

ако нема ограничења: $x' = ax$, $a>0$, $x(t) = x(0)\cdot e^{at}$



експоненцијалан раст

K – идеална величина популације (капацитет станишта)

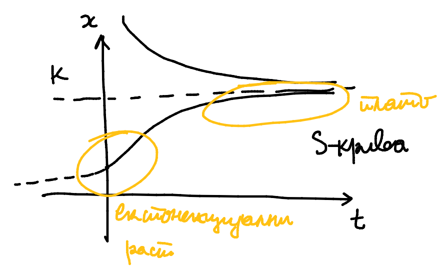
$K>0$

$$x' = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$x = K \Rightarrow x' = 0$$

$\sim x\cdot x$ – такмичење унутар врсте („број сусрета")

„логистички модел"



2 врсте без интеракција, (врсте x са врстом y)

$$\left.\begin{aligned} x' &= r_1 x\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) \\ y' &= r_2 y\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) \end{aligned}\right\}\ \text{независне ДЈ}$$

Уводимо интеракцију:

$\sim xy$, $\sim yx$

$\alpha_{12}, \alpha_{21} > 0$ мере интеракцију y према x (α_{12}) и x према y (α_{21})

$$x' = r_1 x\left(1 - \frac{x}{K_1} - \frac{\alpha_{12}}{r_1} y\right)$$

$$y' = r_2 x\left(1 - \frac{y}{K_2} - \frac{\alpha_{21}}{r_2} x\right)$$

може да се упрости: $a_{12} = \dfrac{\alpha_{12}K_2}{r_1}$, $a_{21} = \dfrac{\alpha_{21}K_1}{r_2}$, $\rho = \dfrac{r_2}{r_1}$

Смене пром: $x \rightsquigarrow \frac{x}{K_1}$, $y \rightsquigarrow \frac{y}{K_2}$, $t \rightsquigarrow r_1 t$

добије се: $x' = x(1-x-a_{12}y)$ $\qquad \rho, a_{12}, a_{21} > 0$

$y' = \rho y(1-y-a_{21}x)$ ⟵ домаћи: доказати ово

Еквилибријуми: $x'=y'=0 \Rightarrow x(1-x-a_{12}y)=0 \wedge \rho y(1-y-a_{21}x)=0$

$x=0 \Rightarrow y(1-y)=0 \Rightarrow y \in \{0,1\}$ $\qquad X_1=(0,0)$

$\qquad X_2=(0,1)$

$y=0 \Rightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow x\in\{0,1\}$ $\qquad X_3=(1,0)$

$x\neq 0, y\neq 0$ $\quad \left.\begin{matrix} x+a_{12}y=1 \\ y+a_{21}x=1 \end{matrix}\right\}$ --- $X_4=\left(\frac{1-a_{12}}{1-a_{12}a_{21}}, \frac{1-a_{21}}{1-a_{12}a_{21}}\right)$

(*) занемарујемо: $a_{12}=1 \vee a_{21}=1 \vee a_{12}a_{21}=1$ (да би било мање случајева)

x,y - број јединки $\Rightarrow x\geq 0, y\geq 0 \rightsquigarrow$ посматрамо динамику само у 1. квадранту

Испоставиће се да су од интереса случајеви:

I) $a_{12}<1 \wedge a_{21}<1$ $\qquad$ III) $a_{12}<1 \wedge a_{21}>1$

II) $a_{12}>1 \wedge a_{21}<1$ $\qquad$ IV) $a_{12}>1 \wedge a_{21}<1$

Урадићемо I) детаљније: нпр. $a_{12}=\frac{1}{3}$, $a_{21}=\frac{1}{2}$, $\rho=1$

$x' = x\left(1-x-\frac{y}{3}\right)$

$y'=y\left(1-y-\frac{x}{2}\right)$

Еквилибријуми: $X_1=(0,0)$, $X_2=(0,1)$, $X_3=(1,0)$, $X_4=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

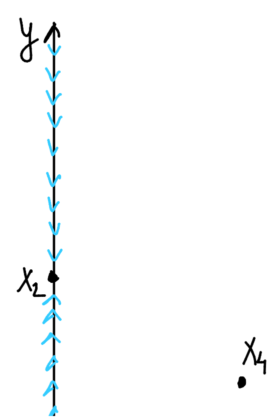
по осама: $x=0$: $0'=0\cdot(\ldots)$ ✓

$y'=y(1-y)$

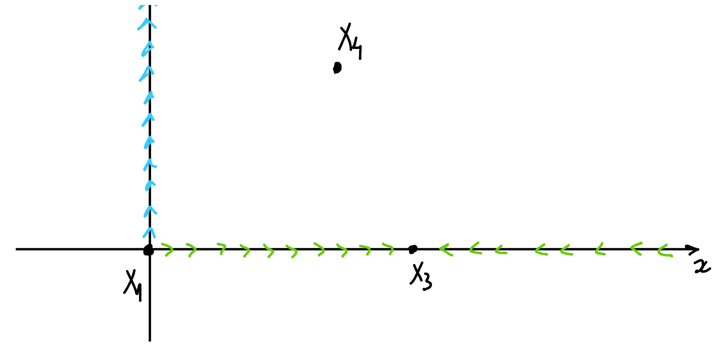
$y'>0 \Leftrightarrow y\in(0,1)$

$y'<0 \Leftrightarrow y>1$

$y=0$ $\qquad x'=x(1-x)$



$y > 0$ $\qquad x' = x(1-x)$



систем је нелинеаран!

$$X' = F(X) \rightsquigarrow X' = AX$$

„апроксимирано"

линеаризација система у околини еквилибријума X^*:

$$F(X) = \overset{=0}{F(X^*)} + dF(X^*)\cdot(X-X^*) + o(---)$$

$$F(X) \approx \underbrace{\boxed{dF(X^*)}}_{=A}\cdot(X-X^*)$$

смена: $y = X - X^*$

$$X' = A(X-X^*) \rightsquigarrow y' = Ay$$

$$X' = F(X) \rightsquigarrow X' = A(X-X^*)$$

$$A = dF(X^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(X^*) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(X^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(X^*) & \cdots & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X^*) \end{bmatrix}$$

$$F = (F_1, \dots, F_n)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

[T] Ако је X^* еквилибријум и $dF(X^*)$ нема сопствених вредности λ т.д. $Re(\lambda) = 0$, онда фазни портрет од $X' = F(X)$ „личи на" фазни портрет од $X' = dF(X^*)\cdot(X-X^*)$ у околини X^*.

↳ транслирамо из (0,0) у X^*

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} \overset{=F_1}{x(1-x-\frac{y}{3})} \\ \underset{=F_2}{y(1-y-\frac{x}{2})} \end{bmatrix}$$

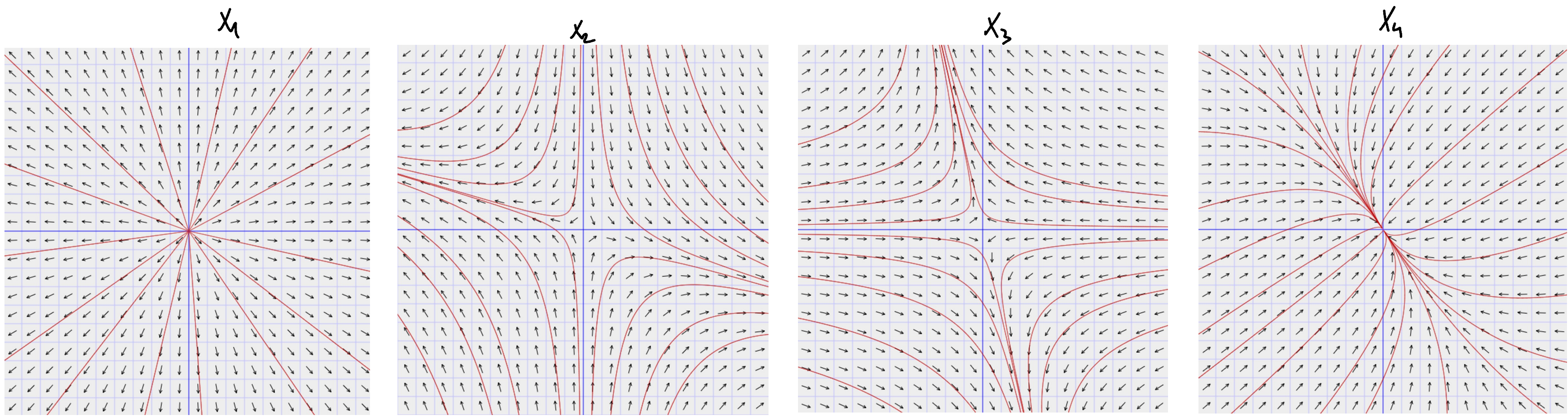
$$dF(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{3} - 2x & -\frac{x}{3} \\ -\frac{y}{2} & 1 - \frac{x}{2} - 2y \end{bmatrix}$$

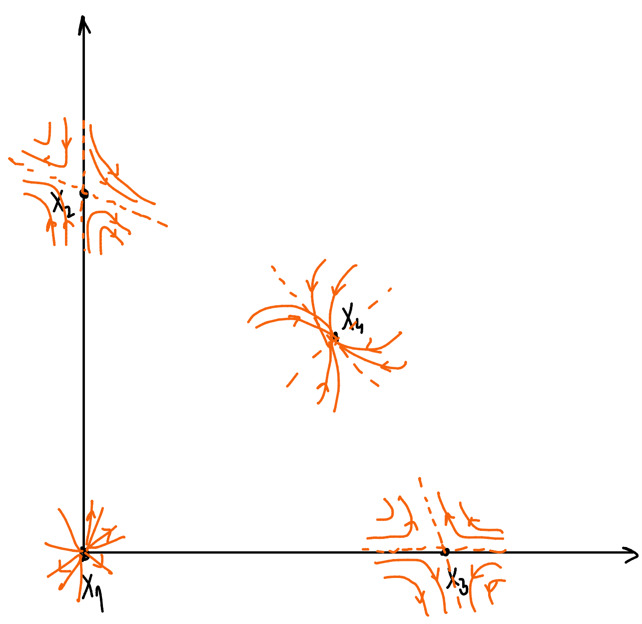
$X_1 = (0,0)$: $\quad dF(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \rightsquigarrow$ нестабилна звезда

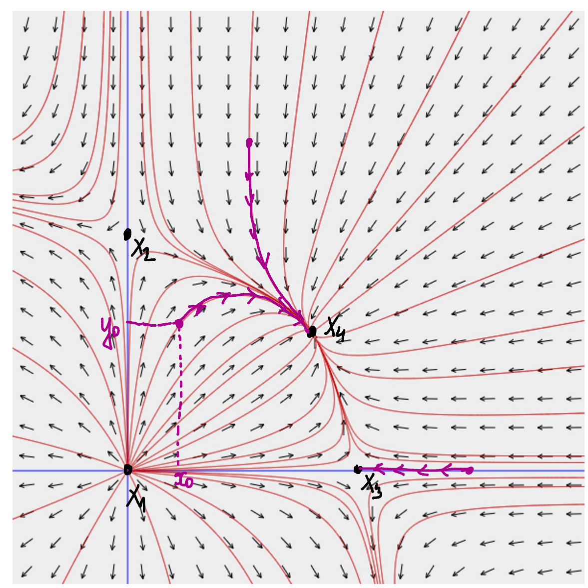
$X_2=(0,1)$: $\quad dF(0,1)=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=\frac{2}{3},\ \lambda_2=-1 \rightsquigarrow$ седло

$X_3=(1,0)$: $\quad dF(1,0)=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\frac{1}{2} \rightsquigarrow$ седло

$X_4=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$: $\quad dF\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)=\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-\frac{2}{5} \rightsquigarrow$ стабилан чвор







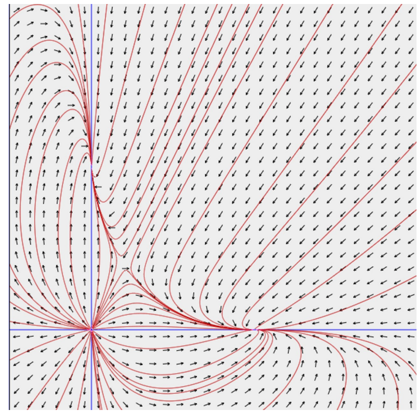
$\forall x(0),y(0)>0 \Rightarrow (x(t),y(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} X_4$

$a_{12},a_{21}<1$ – такмичење није довољно јако и обе врсте опстану, али у мањем броју него да су саме

коегзистирајуће врсте

II) изумирање врсте

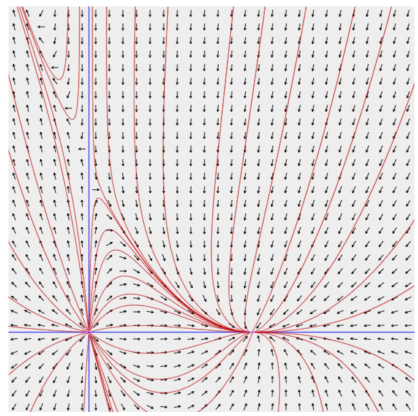
нпр.
$$x' = x(1 - x - 2y)$$
$$y' = y(1 - y - 3x)$$



увек једна врста изумире, а која зависи од почетног стања

III) и IV) истребљење

нпр.
$$x' = x\left(1 - x - \frac{y}{2}\right)$$
$$y' = y(1 - y - 3x)$$



увек једна врста изумире, а која не зависи од почетног стања