① $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $e^{xA} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ -3e^x + 3e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}$

Дат је систем $y' = B^{-1}ABy + D(x)$.

а) $D(x) \equiv 0$, решити систем.

б) Одредити $B^{-1}AB$.

в) $D(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^x \end{bmatrix}$, решити систем.

а) $y' = B^{-1}ABy$ хомоген са кк $\rightsquigarrow$ ОР: $y(x) = e^{xB^{-1}AB} \cdot c$, $c \in \mathbb{R}^2$

$$y(x) = e^{xB^{-1}AB} \cdot c = B^{-1}e^{xA}B \cdot c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ -3e^x + 3e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot c = \dots = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix} \cdot c, \ c \in \mathbb{R}^2.$$

б) $B^{-1}AB = S$

$$e^{xS} = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix}$$

$S \overset{?}{\longleftarrow} \rightsquigarrow e^{xS}$

$\Phi(x)$ – фундаментална матрица система $y' = Ay$, важи $\Phi'(x) = A\Phi(x)$, $W(x) = \det \Phi(x) \neq 0$

$\rightsquigarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n$ решења $[\varphi_1 \dots \varphi_n]' = A \cdot [\varphi_1 \dots \varphi_n]$

$\forall k,\ \varphi_k' = A\varphi_k$

за ЛСДЈКК: e^{xA} једна фунд. матрица $y' = Ay$:

1) $\Phi'(x) = \frac{d}{dx}(e^{xA}) \overset{①}{=} Ae^{xA} = A\Phi(x)$

2) $W(x) = \det(\Phi(x)) = \det(e^{xA}) \overset{④}{=} e^{tr(xA)} \neq 0$

$$\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x) \ / \cdot \Phi^{-1}(x) \quad (W(x) \neq 0)$$

$$A(x) = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x)$$

$\Phi(x) = e^{xS}$ је фунд. $\Rightarrow S = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x)$

$$\Phi(x) = e^{xS} = \begin{bmatrix} 7e^x - 6e^{2x} & 14e^x - 14e^{2x} \\ -3e^x + 3e^{2x} & -6e^x + 7e^{2x} \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi'(x) = \begin{bmatrix} 7e^x - 12e^{2x} & 14e^x - 28e^{2x} \\ -3e^x + 6e^{2x} & -6e^x + 14e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(x) = (e^{xS})^{-1} \underset{\text{за вежу}}{=} e^{-xS} = \Phi(-x) = \begin{bmatrix} 7e^{-x} - 6e^{-2x} & 14e^{-x} - 14e^{-2x} \\ -3e^{-x} + 3e^{-2x} & -6e^{-x} + 7e^{-2x} \end{bmatrix}$$

ᶻза вежбу

$$S = B^{-1}AB = \Phi'(x)\cdot\Phi^{-1}(x) = \dots = \begin{bmatrix} -5 & -14 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

в) (може и без б)

$$y(x) = \Phi(x)\cdot\left(C + \int \Phi^{-1}(x)\cdot D(x)\,dx\right) \quad \dots \quad y(x) = \Phi(x)\cdot c + \begin{bmatrix} -4 + e^{x}(14x+14) \\ \frac{3}{2} + e^{2x}(-6x-7) \end{bmatrix}.$$

② Решити систем

$$\begin{aligned} x^2 yy' &= \frac{y^2}{2} + e^{2z} \quad /\cdot 2 \\ 2x^2 z' &= -3\frac{y^2}{e^{2z}} - 4 \quad /\cdot e^{2z} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y^2 \Rightarrow y_1' = (y^2)' = 2yy' \\ z_1 &= e^{2z} \Rightarrow z_1' = (e^{2z})' = e^{2z}\cdot 2z' \end{aligned}\right\} \text{ смене!}$$

$$\begin{aligned} x^2(2yy') &= y^2 + 2e^{2z} \\ x^2(2e^{2z}\cdot z') &= -3y^2 - 4e^{2z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2\cdot y_1' &= y_1 + 2z_1 \\ x^2\cdot z_1' &= -3y_1 - 4z_1 \end{aligned}$$

$y_1(x) \rightsquigarrow y_1(t)$

$z_1(x) \rightsquigarrow z_1(t)$

$$\frac{d}{dt}y_1 = \frac{d}{dx}y_1\cdot\frac{dx}{dt} = y_1'\cdot\frac{dx}{dt} \stackrel{?}{=} y_1'\cdot x^2$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \,/\!\int$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y_1 &= y_1 + 2z_1 \\ \frac{d}{dt}z_1 &= -3y_1 - 4z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}'(t) = A\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \dots \quad e^{tA} = \dots$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\cdot c, \quad c \in \mathbb{R}^2$$

$$y_1(t) = c_1e^{-t} - 2c_2e^{-2t} \xrightarrow{t\to x} y_1(x) = c_1e^{1/x} - 2c_2e^{2/x}$$

$$\xrightarrow{y_1\to y} y(x) = \pm\sqrt{c_1e^{1/x} - 2c_2e^{2/x}}$$, што за z.

Примена Пикарове Т на системе

Пикар: $y' = F(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ има јединствено решење ако

1) F је непрекидно

2) F је локално Липшицово у y_0 (униформно по x)

$\exists\, U \ni y_0$ околина од y_0 и $L>0$ тд. $\|F(x,y_1) - F(x,y_2)\| \le L\cdot\|y_1 - y_2\|$, $\forall y_1, y_2 \in U$

$(\exists\, \delta>0,\ U = B(y_0;\delta))$ $\quad$ $(\forall x\in I$ који садржи $x_0)$

→ није битно која је норма , ми ћемо узети $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ еуклидску.

① Доказати да Кошијев проблем $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2^2 \\ y_2' &= y_1^2 \end{aligned}$, $y_1(1) = y_2(1) = 2$ има јединствено решење.

1) $F(x,y) = (x+y^2, x^2) = \begin{bmatrix} x+y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}$

$x, y^2, x^2, x+y^2 \to$ полиноми $\Rightarrow$ F непрекидно

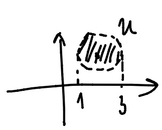
2) $y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\delta = ?$, $L = ?$

$\delta = 1$, $U = B((2,2);\delta)$, $L = ?$

$y_1 = (x_1, y_1) \in U$

$y_2 = (x_2, y_2) \in U$

$1 \le x_1, y_1, x_2, y_2 \le 3$



$$\|F(y_1) - F(y_2)\| \le L\cdot \|y_1 - y_2\|$$

$$\|(x_1+y_1^2, x_1^2) - (x_2+y_2^2, x_2^2)\| \le L\cdot\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|$$

$$\sqrt{(x_1+y_1^2-x_2-y_2^2)^2 + (x_1^2-x_2^2)^2} \le L\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad /^2$$

$$((x_1-x_2)+(y_1^2-y_2^2))^2 + (x_1^2-x_2^2)^2 \le L^2\cdot((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)$$

$$\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\mathrm{I}} + \underbrace{2(x_1-x_2)(y_1^2-y_2^2)}_{\mathrm{II}} + \underbrace{(y_1^2-y_2^2)^2}_{\mathrm{III}} + \underbrace{(x_1^2-x_2^2)^2}_{\mathrm{IV}} \le L^2\cdot \underbrace{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)}_{N}$$

$+:$ $(x_1-x_2)^2 \le N$

I: $(x_1-x_2)^2 \le N$

III: $(y_1^2-y_2^2)^2 = (y_1-y_2)^2(y_1+y_2)^2 \le (y_1-y_2)^2\cdot(3+3)^2 = (y_1-y_2)^2\cdot 36 \le 36N$

IV: $(x_1^2-x_2^2)^2 = (x_1-x_2)^2(x_1+x_2)^2 \le \dots \le 36N$

II: $2(x_1-x_2)(y_1^2-y_2^2) = (y_1+y_2)\cdot 2(x_1-x_2)(y_1-y_2) \le (y_1+y_2)\cdot 2|(x_1-x_2)(y_1-y_2)| \le (y_1+y_2)N \le 6N$

$a^2+b^2 \ge 2|ab| \ge 2ab$

лево $\le (1+36+36+6)N = 79N$

$L^2=79$, $L=\sqrt{79}$

$\Rightarrow$ важи Пикар

домаћи: (1) Показати да је F (из трећег зад.) лок. Лип. у свакој тачки из $\mathbb{R}^2$ (не само $(2,2)$).

(2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt[4]{x^2+y^2})$. Док. да f није лок. Лип. у $(0,0)$.

Тј. не важи Пикар за $y'=f(y)$, $y(x_0)=(0,0)$.

Фазни портрети линеарних динамичких система у 2Д

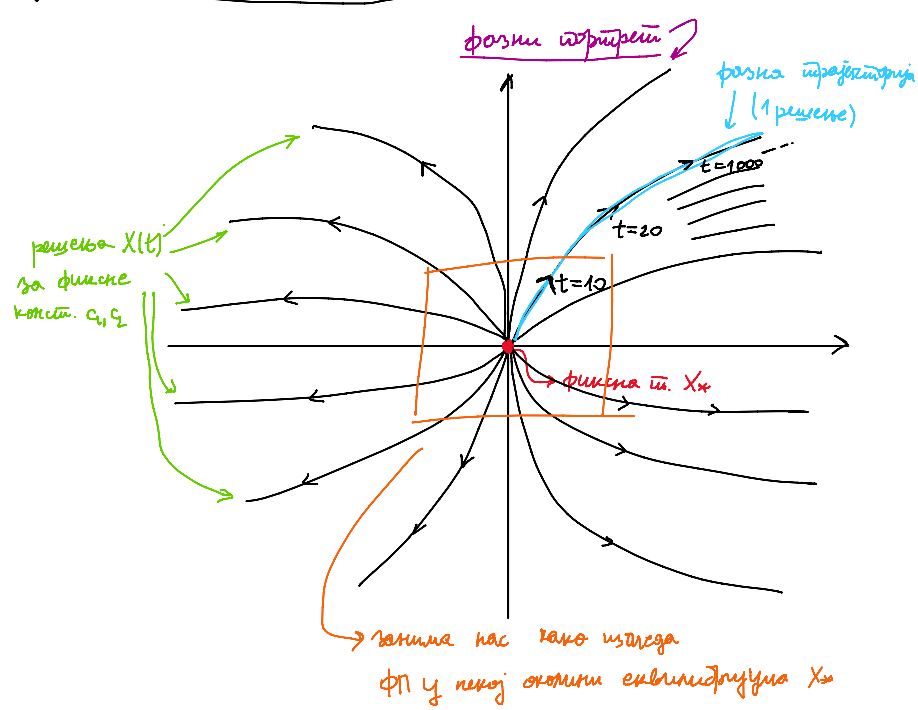
$y(x)$ функција $\leadsto X(t)$ X – положај, t – време

$X'=AX$, решење $X(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$A\in M_2(\mathbb{R})$

$= \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$

параметарска крива у $\mathbb{R}^2$ (за фикс. c_1,c_2)



X_* фиксна тачка = еквилибријум: $X'=0$

$X'=F(X)$, $F(X_*)=0$

ЛСАДКК у $\mathbb{R}^2$: $X'=AX$, $A\in M_2(\mathbb{R})$

$AX_*=0 \Rightarrow$ реш. је векторски потпростор од $\mathbb{R}^2$:
- тачка $(0,0)$ ($\dim=0$)
- права кроз $(0,0)$ ($\dim=1$)
- цело $\mathbb{R}^2$ ($\dim=2$)