1. а) $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$

$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ решити систем

$y_3' = 2y_1 - y_2$

б) Решити Кошијев проблем $y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

```
>> A=[1 -1 1; 1 1 -1; 2 -1 0]

A =

     1    -1     1
     1     1    -1
     2    -1     0

>> eig(A)

ans =

   -1.0000
    1.0000
    2.0000
```

сопствене вредности матрице A

а) $y' = Ay$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = 0$

$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = 2 \rightsquigarrow \dot{J} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

$(A - \lambda_1 E)\gamma_1 = 0$

$\gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ $\gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

```
>> [T J] = eig(A)

T =

    0.1690   -0.5774    0.7071
   -0.5071   -0.5774    0.0000
   -0.8452   -0.5774    0.7071


J =

   -1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    2.0000
```

T-матрица промене база са нормираним векторима

$\dot{J}$-дијагонална $\dot{J} \sim A$

$T = \begin{bmatrix} \gamma_1\downarrow & \gamma_2\downarrow & \gamma_3\downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A = T \cdot \dot{J} \cdot T^{-1}$

$e^{xA} = \underset{\checkmark}{T} \cdot \underset{?}{e^{x\dot{J}}} \cdot \underset{?}{T^{-1}}$

$x\dot{J} = \begin{bmatrix} -x & & \\ & x & \\ & & 2x \end{bmatrix} \rightsquigarrow e^{x\dot{J}} = \begin{bmatrix} e^{-x} & & \\ & e^{x} & \\ & & e^{2x} \end{bmatrix}$

```
T =

     1     1     1
    -3     1     0
    -5     1     1

>> det(T)

ans =

     6
```

инверз матрице

```
>> inv(T)

ans =

    0.1667    0.0000   -0.1667
    0.5000    1.0000   -0.5000
    0.3333   -1.0000    0.6667
```

инверз матрице

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow T^{-1} = ?$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \cdot \operatorname{Adj}(T) = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{ОР}: y(x) = e^{xA} \cdot c = T \cdot e^{x\dot{J}} \cdot \underbrace{T^{-1} \cdot c}_{c_1} = T \cdot e^{x\dot{J}} \cdot c_1 \qquad c, c_1 \in \mathbb{R}^3$$

```
>> T*J*inv(T)

ans =

    1.0000   -1.0000    1.0000
    1.0000    1.0000   -1.0000
    2.0000   -1.0000   -0.0000
```

провера $A=TJT^{-1}$

```
>> syms x
>> expm(x*A)

ans =

[     exp(-x)/6 + exp(2*x)/3 + exp(x)/2, exp(x) - exp(2*x),     (2*exp(2*x))/3 - exp(-x)/6 - exp(x)/2]
[                   exp(x)/2 - exp(-x)/2,            exp(x),                   exp(-x)/2 - exp(x)/2]
[ exp(2*x)/3 - (5*exp(-x))/6 + exp(x)/2, exp(x) - exp(2*x), (5*exp(-x))/6 + (2*exp(2*x))/3 - exp(x)/2]
```

експонент матрице: e^{xA}

x-симболичка променљива

б) $y(0)=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

I) $y(x)=Te^{xJ}T^{-1}\cdot c$

$y(0)=Te^{0}T^{-1}\cdot c=TET^{-1}\cdot c=TT^{-1}c=Ec=c=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow y_k(x)=Te^{xJ}T^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$

II) $y(x)=Te^{xJ}\cdot c_1$

$y(0)=Te^{0}\cdot c_1=TEc_1=Tc_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \rightsquigarrow c_1=?\ \ldots$

$\left(c_1=T^{-1}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$

② $y'=Ay$

$A=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

```
>> A=[-3 0 0; 0 3 -2; 0 1 1]

A =

    -3     0     0
     0     3    -2
     0     1     1

>> eig(A)

ans =

   2.0000 + 1.0000i
   2.0000 - 1.0000i
  -3.0000 + 0.0000i
```

$\lambda_1=-3$

$\lambda_{2/3}=2\pm i$

$\alpha+i\beta \longleftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$

λ_1 $\quad$ $\lambda_2=2+i$

$J=\begin{bmatrix}\boxed{-3} & & \\ & 2 & 1\\ & -1 & 2\end{bmatrix}$

$e^{xJ}=?$

$\begin{bmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}$ – блок-дијагонална

$\begin{bmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}B_1^k & \\ & B_2^k\end{bmatrix} \rightsquigarrow e^{x\begin{bmatrix}B_1 & \\ & B_2\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}e^{xB_1} & \\ & e^{xB_2}\end{bmatrix}$

Подсетник:

$e^{x\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}}=e^{\alpha x}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\cos(\beta x) & \sin(\beta x)\\ -\sin(\beta x) & \cos(\beta x)\end{bmatrix}}_{„R_{\beta x}“}$

$$e^{x\dot{J}} = \begin{bmatrix} \underbrace{\boxed{e^{-3x}}}_{1\times1} & \\ & \underbrace{\boxed{e^{x\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}}}}_{2\times2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{e^{-3x}} & & \\ & e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ & -e^{2x}\sin x & e^{2x}\cos x\end{bmatrix}$$

$T^{-1} = ?$

$\lambda_1 = -3 \rightsquigarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2+i \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1-i\end{bmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{Re}\gamma_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \rightsquigarrow \operatorname{Im}\gamma_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix}\gamma_1\downarrow & \operatorname{Re}\gamma_2\downarrow & \operatorname{Im}\gamma_2\downarrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$

ОР: $y(x) = T\cdot e^{x\dot{J}}\cdot c, \; c\in\mathbb{R}^3$

```
>> [T J] = eig(A)

T =
          γ2                    γ3 = γ̄2                γ1
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.0000 + 0.0000i
   0.8165 + 0.0000i   0.8165 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.4082 - 0.4082i   0.4082 + 0.4082i   0.0000 + 0.0000i

J =
          λ2                    λ3 = λ̄2
   2.0000 + 1.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   2.0000 - 1.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   3.0000 + 0.0000i   λ1
```

↳ за комплексне сопс. вр. нам не даје оно што нам треба

③ $y' = Ay$

$A = \begin{bmatrix}0&-4\\1&4\end{bmatrix}$

```
>> A=[0 -4; 1 4]

A =

     0    -4
     1     4

>> eig(A)

ans =

    2.0000
    2.0000
```

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$k = 2$ - алгебарска вишеструкост

Могућности за $\dot{J}$: $\dot{J} = \begin{bmatrix}\boxed{2}&0\\0&\boxed{2}\end{bmatrix}$ или $\dot{J} = \boxed{\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}}$

↳ 2 Жорданова блока

↳ 1 Жорданов блок

$(A-2E)\gamma = 0$

$\begin{bmatrix}-2&-4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l}\cancel{-2a-4b=0}\\ a+2b=0\end{array}\right\} a=-2b$

$\gamma_1 = \begin{bmatrix}-2b\\b\end{bmatrix} = b\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

нпр. $b=1$

Број сопствених вектора је 1

$\|$

$\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda_1E) = \dim\operatorname{Lin}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right\} = 1$

$\|$

геометријска вишеструкост $= m = 1$

$\|$

број Жорданових блокова $= 1$

$\Downarrow$

$\dot{J} = \begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$

```
>> jordan(A)

ans =

     2     1
     0     2
```

$T = ?$ Жорданова нормална форма

$T = \begin{bmatrix} \gamma_1 \downarrow & \gamma_2 \downarrow \end{bmatrix}$, γ_2 - није сопствени, али јесте уопштени сопствени (генералисани)

$\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$

$$(A-\lambda_1 E)\gamma_2 = \gamma_1$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{-2a-4b=-2}$$

$$a+2b=1 \ , a = 1-2b \rightsquigarrow \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1-2b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \text{ нпр. } b=0: \ \gamma_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_2 \end{array}$$
$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> [T J] = jordan(A)

T =

    -2     1
     1     0


J =

     2     1
     0     2
```

$$e^{xJ} = ? \qquad J = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N \text{ - нилпотентна } (\exists k, N^k = 0)}$$

$$DN = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = ND$$

$\rightsquigarrow$ 2

$$e^{xJ} = e^{xD} \cdot e^{xN} = \begin{bmatrix} e^{2x} & \\ & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$xD = \operatorname{diag}[2x \quad 2x] \Rightarrow e^{xD} = \operatorname{diag}[e^{2x} \quad e^{2x}]$$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^k = 0 \ , k \geq 2$$

$$e^{xN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k N^k}{k!} = \frac{x^0 N^0}{0!} + \frac{x^1 N^1}{1!} = E + xN = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ОР: $y(x) = T \cdot e^{xJ} \cdot c \ , c \in \mathbb{R}^2$

4) $y' = Ay$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$$

$$k = 4$$

Могућности за J:

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & & & \\ & \boxed{2} & & \\ & & \boxed{2} & \\ & & & \boxed{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

4 блока, 3 бл., 2 бл., 2 бл., 1 бл.

$(A-2E)v=0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cancel{0=0} \\ c=0 \\ \cancel{0=0} \\ a=0 \end{matrix} \Rightarrow a=c=0 \Rightarrow v=\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = b\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$m = \dim\ker(A-2E) = \dim\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \middle| b,d\in\mathbb{R}\right\} = 2$$

$$\Rightarrow 2 \text{ Жорданова блока} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

μ – минимални полином од A

φ – карактеристични полином од A

$$\varphi(\lambda) = \det(A-\lambda E) = (\lambda-2)^4$$

$\mu | \varphi$, $\mu(A)=0$, $st\mu$ најмањи могући, μ моничан

$\mu | (\lambda-2)^4 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^k$, $1\le k\le 4$

$k=1$: $\mu(A) = A-2E \neq 0$

$k=2$: $\mu(A) = (A-2E)^2 = 0 \Rightarrow \mu(\lambda) = (\lambda-2)^2 \Rightarrow st\mu = \deg\mu = 2$

$\Rightarrow$ највећи ред Жордановог блока је 2

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

$e^{xJ} = ?$

$$J = \begin{bmatrix} B & \\ & B \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow e^{xJ} = \begin{bmatrix} e^{xB} & \\ & e^{xB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & & \\ & e^{2x} & & \\ & & e^{2x} & xe^{2x} \\ & & & e^{2x} \end{bmatrix}$$

$T=?$ соп. век $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

сваки има свој Ж. блок

$$J = \begin{array}{cc} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}} \end{array}$$

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \\ \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \gamma_4 \end{array}$$

(може и редослед: $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_1, \gamma_2$)

γ_2 - уопштени за γ_1:

$$(A-2E)\gamma_2 = \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{нпр. } b=d=0} \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

γ_4 - уопштени за γ_3:

$$(A-2E)\gamma_4 = \gamma_3$$

$$\vdots$$

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{нпр. } b=d=0} \gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
A =

     2     0     0     0
     0     2     1     0
     0     0     2     0
     1     0     0     2

>> [T J] = jordan(A)

T =

     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     1     0     0     0


J =

     2     1     0     0
     0     2     0     0
     0     0     2     1
     0     0     0     2
```

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (мора бити инвертибилна, $\det T \neq 0$)

ОР: $y(x) = T \cdot e^{xJ} \cdot C, \ C \in \mathbb{R}^4$